УДК 514.7
ББК 22.151
Н60

Нидэм Т.

Н60 Наглядная дифференциальная геометрия и формы / пер. с англ. А. А. Слинкина. – М.: ДМК Пресс, 2024. – 660 с.: ил.

ISBN 978-5-93700-242-6

Перед вами увлекательное, интуитивно понятное и наглядное исследование дифференциальной геометрии и форм. С помощью множества исполненных вручную рисунков автор разворачивает перед читателем панораму ньютоновских геометрических методов, стремясь дать новые геометрические объяснения классических результатов. В конце книги он предлагает введение в дифференциальные формы, в котором достаточно трудные темы рассматриваются с интуитивной точки зрения и геометрически.

Требуя от читателя только знания основ математического анализа и геометрии, эта книга побуждает переосмыслить способ освоения важного раздела математики – дифференциальной геометрии.

УДК 514.7
ББК 22.151

ISBN 978-0-691-20370-6 (англ.)

ISBN 978-5-93700-242-6 (рус.)

Содержание

АКТ I

Природа пространства

АКТ II

Метрика

АКТ V

Формы

От автора

Увлекательное, интуитивно понятное и наглядное исследование дифференциальной геометрии и форм.

У этой книги две основные цели. В первых четырёх актах Тристан Нидэм возвращает геометрию в дифференциальную геометрию. С помощью 235 исполненных вручную рисунков Нидэм разворачивает перед читателем панораму ньютоновских геометрических методов, стремясь дать новые геометрические объяснения классических результатов. В пятом акте он предлагает введение в дифференциальные формы для студентов, в котором достаточно трудные темы рассматриваются с интуитивной точки зрения и геометрически.

К уникальным особенностям первых четырёх актов можно отнести: четыре разных геометрических доказательства важнейшей глобальной теоремы Гаусса–Бонне, раскрывающей удивительную связь между локальной геометрией и глобальной топологией; простое геометрическое доказательство знаменитой Theorema Egregium Гаусса; полное геометрическое рассмотрение тензора кривизны Римана для n-многообразия и подробное геометрическое рассмотрение уравнения поля Эйнштейна, которое описывает гравитацию как искривлённое пространство-время (общая теория относительности), а также его применения к гравитационным волнам, чёрным дырам и космологии.

Последний акт содержит интуитивно понятное геометрическое введение в дифференциальные формы, в котором уделяется внимание таким вопросам, как унификация всех интегральных теорем векторного исчисления, элегантная формулировка уравнений электромагнетизма Максвелла в терминах 2-форм, когомологии де Рама, дифференциальная геометрия, изложенная с помощью метода реперов Картана, и вычисление тензора Римана с помощью 2-форм кривизны.

Шесть из семи глав пятого акта можно читать совершенно независимо от остальной книги, они содержат замкнутое введение в дифференциальные формы.

Требуя от читателя только знания основ математического анализа и геометрии, эта книга побуждает переосмыслить способ освоения и преподавания важного раздела математики – дифференциальной геометрии.

Об авторе

Тристан Нидэм (сын известного специалиста по социальной антропологии Родни Нидэма) вырос в Оксфорде, Англия, где посещал Школу дракона (вместе со Стивеном Вольфрамом и Хью Лаури).

Он изучал физику в Мертон-колледже, Оксфорд, после чего перешёл в Математический институт, где имел честь изучать чёрные дыры под руководством сэра Роджера Пенроуза.

Степень доктора Тристан получил в 1987 году, а в 1989 году стал преподавать в университете Сан-Франциско. В настоящее время его увлекает дифференциальная геометрия, но не угасает также любовь к комплексному анализу, общей теории относительности и истории науки. Своей постоянной миссией он считает поиск новых интуитивно понятных форм осмысления и новых способов наглядного представления.

Его книга «Visual Complex Analysis» (Oxford University Press) заняла первое место на Национальной иезуитской книжной премии. Более ранняя работа получила премию Математической ассоциации Америки имени Карла Б. Аллендорфера.

Его новая книга «Visual Differential Geometry and Forms: A Mathematical Drama in Five Acts» была выпущена издательством Принстонского университета 13 июля 2021 года.

Пролог

Предложение доктору Фаусту

Алгебра – предложение, сделанное математику дьяволом. Дьявол говорит: «Я дам тебе могучую машину, она ответит на все твои вопросы. А в ответ тебе нужно лишь отдать мне свою душу: откажись от геометрии, и ты получишь эту чудесную машину»... именно в этом кроется опасность для нашей души, потому что, предавшись алгебраическим вычислениям, мы перестаём мыслить: мы перестаём мыслить геометрически, перестаём думать о смысле.

Сэр Майкл Атья[1]

Фраза «дифференциальная геометрия» содержит слово «геометрия».

Тавтология? Студент, впервые открывший рекомендованный преподавателем учебник по этой теме, пожалуй, не согласится! Вместо геометрии наш незадачливый студент будет ошарашен изобилием *формул*, доказательства которых требуют пространных и запутанных *вычислений*. Усугубляет ситуацию то, что эти вычисления зачастую *некрасивы*, содержат «буйство индексов»[2] – выражение, пущенное в обиход Эли Картаном (одним из главных героев нашей драмы) в 1928 году. Если студент честный и смелый, то профессору придётся отвечать на неприлично прямой вопрос: «А куда делась вся *геометрия*?!»

Что ж, будем честны, на самом деле в большинстве современных учебников нет недостатка в *рисунках* – обычно это построенные компьютером кривые и поверхности. Но, за немногими исключениями, эти рисунки – не более чем конкретные примеры, просто *иллюстрирующие* теоремы, доказательства которых целиком опираются на манипуляции символами. Сами по себе эти рисунки *не объясняют ничего*!

Перед этой книгой поставлены две разные и равно амбициозные цели, первая из которых есть предмет первых четырёх актов: вернуть «геометрию» во введение в «дифференциальную геометрию». Все 235 вручную созданных рисунков, встречающихся на страницах этой книги, качественно и принципиально отличаются от простых сгенерированных компьютером примеров. Это концептуальные плоды многих лет хоть и прерывающегося, но напряжённого труда – наглядное воплощение *интуитивных геометрических объяснений поразительных геометрических фактов*.

---

1 *Mathematics in the 20th Century* (Shenitzer & Stillwell, 2002, стр. 6).

2 Полная цитата проливает свет на героическую задачу, поставленную Картаном: «Полезность абсолютного дифференциального исчисления Риччи и Леви-Чивита была бы куда больше, избегни они чрезмерно формальных вычислений, в которых буйство индексов скрывает зачастую очень простую геометрическую реальность. Именно эту реальность я и собрался явить на свет». (Из предисловия к книге Картана 1928 года.)

Слова, написанные мной в предисловии к VCA[3], будут уместны и здесь: «Значительная доля геометрических наблюдений и рассуждений, содержащихся в этой книге, является, насколько мне известно, новой. Я не привлекал к этому внимания в самом тексте, поскольку это не принесло бы никакой пользы: студентам знать необязательно, а специалисты и так знают. Однако в тех случаях, когда идея, очевидно, необычна, но я знаю, что она была опубликована кем-то ещё, я старался воздать должное тем, кому должно». Кроме того, я указываю авторов упражнений, которые кажутся оригинальными, но придуманы не мной.

Хочу внести личную нотку (но с серьёзным математическим подтекстом, который станет ясен позднее): корни этого предприятия уходят на десятилетия вглубь, во времена моей юности. История сводится к рассказу о двух книгах.

Первой книгой, пробудившей во мне сильнейшее восхищение дифференциальной геометрией, стала «Общая теория относительности» Эйнштейна. Быть может, опыт был таким ярким, потому что была моя *первая* любовь; тогда мне было 19 лет. Как-то раз, в конце первого года изучения физики в Мэртон-колледже, Оксфорд, я наткнулся на колоссальную чёрную книгу в недрах книжного магазина Блэкуэлла. Хотя тогда я этого не знал, этот том на 1217 страниц специалисты по теории относительности называли «Библией». Если бы я не прочел «Gravitation»[4] (Misner, Thorne, and Wheeler, 1973), мне никогда не представилась бы возможность[5] заниматься под руководством Роджера Пенроуза (и на всю жизнь остаться друзьями), который, в свою очередь, фундаментально изменил моё понимание математики и физики.

Летом 1982 года, заинтригованный математическими намёками, проскальзывающими в великолепной биографии Ньютона, написанной Уэстфоллом (1980), я начал внимательно штудировать шедевр Ньютона (1687) «Математические начала натуральной философии», который обычно называют просто *Начала*. Это была *вторая книга*, фундаментально изменившая мою жизнь. В то время как В. И. Арнольд[6] и С. Чандрасекхар (1995) стремились раскрыть удивительную природу *результатов* Ньютона, полученных в *Началах*, эта книга родилась из очарования *методами* Ньютона.

В другом месте[7] мы говорили о том, что учёные, изучавшие труды Ньютона, убедительно развеяли вредный миф[8] о том, что будто бы результаты, изложен-

---

[3] Учитывая, как часто будут встречаться ссылки на мою первую книгу, Visual Complex Analysis (Needham 1997), я решил ввести для неё компактную аббревиатуру – VCA.

[4] Имеется русский перевод: *Мизнер Ч., Торн К., Уилер Дж.* Гравитация: в 3 т. М.: Мир, 1977. – *Прим. перев.*

[5] Много лет спустя мне выпала честь несколько раз встречаться с Уилером и переписываться с ним, так что в конце концов я смог лично поблагодарить его за то влияние, которое его «Гравитация» оказала на мою жизнь.

[6] См. Arnol'd and Vasil'ev (1991); Arnol'd (1990).

[7] См. Needham (1993), предисловие к VCA, и Needham (2014).

[8] Печально, но семена этого мифа посеял сам Ньютон в пылу яростной битвы с Лейбницем за приоритет в открытии математического анализа. См. Arnol'd (1990), Bloye and Huggett (2011), de Gandt (1995), Guicciardini (1999), Newton (1687, стр. 123) и Westfall (1980).

ные в *Началах*, вышедших в 1687 году, сначала были получены Ньютоном с помощью первоначальной версии его исчисления, а лишь потом преобразованы в геометрическую форму, которую мы находим в законченной работе.

Теперь-то понятно, что к середине 1670-х годов, изучив труды Аполлония, Паппа и Гюйгенса и будучи уже зрелым учёным, Ньютон разочаровался той формой, в которую облек открытие математического анализа, совершённое в юности, – отличной от формы Лейбница, которую все мы изучаем сегодня в вузах, – а вместо этого взял на вооружение чисто геометрические методы.

И так случилось, что к 1680-м годам алгебраическое по природе своей увлечение Ньютона степенными рядами уступило место новой форме исчисления – названной им «синтетическим методом флюксий»[9], – в которой геометрия древних была причудливым образом изменена и реанимирована путём применения к сжатию геометрических фигур в момент их исчезновения. *Это* и есть та живительная, но неалгоритмическая форма исчисления, которую мы во всей силе обнаруживаем в его великих *Началах* 1687 года.

Как и в VCA, я хочу в этой книге в полной мере воспользоваться преимуществами ньютоновского подхода. Поэтому позвольте мне в полный голос и с гораздо большим числом деталей, чем в VCA, заявить об этом в тщетной надежде, что моя вторая книга побудит больше математиков и физиков принять интуитивные (но при этом строгие[10]) методы Ньютона, чем это удалось первой.

Если две величины A и B зависят от малой величины ϵ и их отношение стремится к единице, когда ϵ стремится к нулю, то мы отложим в сторону громоздкий язык пределов и, опираясь на прецедент, созданный Ньютоном в *Началах*, будем говорить просто: «A равно B в конечном счёте». Кроме того, как и в наших предыдущих работах (Needham 1993, 2014), мы будем использовать символ $\asymp$ для обозначения этого понятия равенства в конечном счёте[11]. Короче говоря,

$$\text{«}A\text{ равно }B\text{ в конечном счёте»} \Leftrightarrow A \asymp B \Leftrightarrow \lim_{\epsilon\to 0}\frac{A}{B} = 1.$$

Из теорем о пределах следует (см. упражнение), что равенство в конечном счёте является отношением эквивалентности и что оно наследует дополнительные свойства от обычного равенства, например $X \asymp Y$ & $P \asymp Q \Rightarrow X \cdot P \asymp Y \cdot Q$ и $A \asymp B \cdot C \Leftrightarrow (A/B) \asymp C$.

Прежде чем начать серьёзно применять эту идею, заметим также, что понятие равенства в конечном счёте естественно распространяется на объекты, отличные от чисел; например, можно сказать, что два треугольника «подобны в конечном счёте», т. е. их углы в конечном счёте равны.

---

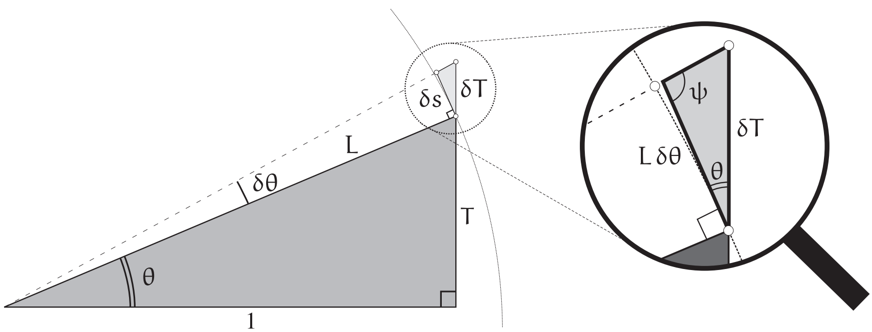
9 См. Guicciardini (2009, гл. 9).

10 См. в дальнейшем мелкий шрифт!

11 Это понятие было впоследствии взято на вооружение лауреатом Нобелевской премии по физике Субрахманианом Чандрасекхаром (см. Chandrasekhar 1995, стр. 44).

Уловив суть метода Ньютона, я тут же попробовал применить его, чтобы упростить читавшийся мной курс введения в анализ, и лишь позднее осознал, как его можно применить к комплексному анализу (в VCA), а теперь и к дифференциальной геометрии. Я мог бы выбирать из большого числа простых иллюстративных примеров (см. дополнительные примеры в Needham 1993), но решил ещё раз воспользоваться тем, что был приведён в предисловии к VCA, по одной простой причине: *на этот раз* я буду использовать нотацию $\asymp$, чтобы строго *представить* аргументацию, тогда как в VCA я этого не делал. На самом деле этот пример можно рассматривать как рецепт преобразования большинства «объяснений» в VCA в «доказательства»[12] путём простой вставки в нужные места знаков $\asymp$.

Сейчас я покажу, что если $T = \tan\theta$, то $\frac{dT}{d\theta} = 1 + T^2$. См. рисунок ниже. Если увеличить θ на небольшую (в конечном счёте обращающуюся в нуль) величину $\delta\theta$, то T увеличится на длину вертикальной гипотенузы δT маленького треугольника, две другие стороны которого по построению направлены под углами $\theta + \delta\theta$ и $\theta + \frac{\pi}{2}$, как показано на рисунке. Для получения результата сначала заметим, что в пределе, когда $\delta\theta$ обращается в нуль, маленький треугольник с гипотенузой δT в конечном счёте оказывается подобен большому треугольнику с гипотенузой L, потому что $\psi \asymp \frac{\pi}{2}$. Далее, как видно под лупой, сторона δs, примыкающая к углу θ в маленьком треугольнике, в конечном счёте равна дуге окружности радиуса L, т. е. $\delta s \asymp L\,\delta\theta$. Таким образом,



$$\frac{dt}{L d\theta} \asymp \frac{\delta T}{L\delta\theta} \asymp \frac{\delta T}{\delta s} \asymp \frac{L}{1} \quad \Rightarrow \quad \frac{dT}{d\theta} = L^2 = 1 + T^2.$$

Насколько я знаю, у Ньютона нет этого конкретного примера, но сравните всё проясняющую прямоту его *стиля*[13] геометрического рассуждения с ничего

[12] Я уже пользовался нотацией $\asymp$ (в частных беседах и в печатных работах) в то время, когда писал VCA, и, оглядываясь назад, могу сказать, что отказ от её употребления в той книге был ошибкой; это дало кое-кому возможность заподозрить, что доказательства, представленные в VCA, менее строгие, чем они были (и остаются) в действительности.

[13] Лучшим проводником подхода Ньютона будете вы сами. Поэтому предлагаем вам незамедлительно изощрить свой ум в ньютоновских рассуждениях, выполнив упражнения 1, 2, 3, 4 на стр. 64–65.

не проясняющими вычислениями, которые мы преподаём нашим студентам сегодня, три столетия спустя! Сам Ньютон писал[14], что геометрический метод следует предпочесть за «ясность и краткость рассуждений и ввиду простоты выводов и требуемых иллюстраций». На самом деле Ньютон пошёл ещё дальше, считая, что *только* синтетический метод «достоин представления публике».

Сам Ньютон не употреблял *никакого* символа для обозначения понятия «равенства в конечном счёте». Его приверженность геометрическому *методу* древних выражается в подражании их *способу* выражения, что заставляло его писать слова «в конечном счёте находятся в отношении равенства» всякий раз, как это понятие возникало в доказательстве. Как объяснял Ньютон (1687, стр. 124), *Начала* «написаны пространными словами в манере древних». Даже утверждая, что два отношения в конечном счёте равны, он настаивал на выражении *каждого отношения* словами. В результате я сам оказался неспособен следовать ходу рассуждений Ньютона, не переведя предварительно каждый его абзац в «современную» форму (которая, кстати, была уже вполне обычной в 1687 году). На самом деле в далеком 1982 году именно это стало катализатором, побудившим меня ввести и использовать символ $\asymp$.

На мой взгляд, решение Ньютона *не* вводить символ «равенства в конечном счёте» стало трагической, но неизбежной ошибкой развития математики. Символическое исчисление Лейбница распространялось по миру, а более прозорливый метод Ньютона оставался на обочине. В последующие столетия лишь горстка людей пыталась исправить нанесённый ущерб и воскресить подход Ньютона, самым известным и заслуженным из них в последние годы был В. И. Арнольд[15] (1937–2010).

Если бы Ньютон отбросил мишуру античного способа изложения, а вместо этого употребил какой-нибудь (*любой*!) символ вместо слов «в конечном счёте равны», то его многословные, занимающие целый абзац доказательства в *Началах* можно было бы свести к нескольким кратким строчкам, а его способ мышления, возможно, был бы широко распространен сегодня. И VCA, и эта книга – попытки продемонстрировать, очень конкретно, неослабевающую актуальность и жизненность геометрического подхода Ньютона в тех областях математики, которые были открыты век спустя после его смерти в 1727 году.

Позвольте мне включить замечание мелким шрифтом о моём употреблении слов «строгость» и «доказательство». Да, моё явное использование ньютоновских равенств в конечном счёте – это квантовый скачок в строгости по сравнению с изложением в VCA, но наверняка найдутся математики, которые будут утверждать (и не без оснований!), что даже такого повышения уровня строгости недостаточно и что *ни одно* из «доказательств» в этой работе не заслуживает такого названия, включая и то, что приведено выше: я действительно не доказал, что сторона треугольника в конечном счёте равна дуге окружности.

---

[14] См. Guicciardini (2009, стр. 231).

[15] См., например, Arnol'd (1990).

Я не могу выдвинуть никакой *логической* защиты, а просто повторю слова, написанные мной в предисловии к VCA больше двадцати лет назад: «Моя книга, без сомнения, имеет много изъянов, о которых я ещё не знаю, но есть один "грех", который я совершил совершенно сознательно и не раскаиваюсь: многие рассуждения не являются строгими, по крайней мере в их текущем виде. Это серьёзное преступление с точки зрения тех, кто верит, что наши математические теории – просто изощрённые умственные построения, ненадёжно подвешенные в воздухе. Тогда строгость становится щекочущим нервы актом нахождения равновесия, который не даёт всей конструкции обрушиться на нас. Но предположим, что кто-то, как я, верит, что наши математические теории – попытка отразить различные стороны крепкого платоновского мира, не нами созданного. Тогда я осмелился бы утверждать, что изначальный недостаток строгости – небольшая цена, если это позволяет читателю взглянуть на мир более прямо и с большим удовольствием, чем было бы возможно в противном случае». Поэтому, чтобы заранее обезоружить своих критиков, я с самого начала признаю: заявление о том, что некоторое утверждение «доказано», следует читать как «*доказано, не оставляя места для обоснованных сомнений*»[16].

Помимо и отдельно от вопроса о строгости возникает ещё один печальный факт: переосмысляя такой большой массив классической математики, я почти наверняка допустил какие-то ошибки. Вся ответственность за них лежит на мне и только на мне. Но, пожалуйста, не корите мои геометрические инструменты за столь неумелое обращение с ними – я *точно так же* могу допускать ошибки в символических вычислениях! Исправления будут приняты с благодарностью по адресу VDGF.correction@gmail.com.

Эту книгу невозможно до конца понять, упустив из виду полный круг разворачивающейся драмы, которая, как было сказано, состоит из пяти актов. Но думается мне, что замысел имеет значение и что неортодоксальная структура и название книги уместны по следующим причинам. Во-первых, я хотел представить идеи так драматично, как вижу их сам, и не только в терминах их исторического развития[17], но и (что куда важнее) в терминах разноуровневых и перекрещивающихся потоков самих идей и их удивительных влияний на другие разделы математики и физики. Во-вторых, больше по случайному совпадению, нежели по осознанному замыслу, роль каждого из пяти актов действительно следует (более-менее) классической структуре шекспировской драмы; в частности, предвкушаемая кульминация и вправду приходится на акт III: «Кривизна». На самом деле лишь спустя несколько лет после начала работы над книгой мне вдруг стало ясно, что то, что я так долго сочинял,

---

[16] Прочитав эти слова, член редакционной коллегии издательства Принстонского университета, оказывавший мне всестороннюю поддержку, предложил моему редактору завершать все мои доказательства буквами «P.B.R.D.» (Proved Beyond a Reasonable Doubt) вместо традиционных «Q.E.D.» (Quod Erat Demonstrandum – что и требовалось доказать)!

[17] Как и в VCA, я горячо рекомендую шедевр Стилуэлла (2010) «Mathematics and Its History» в дополнение к этой книге, поскольку он содержит глубокий и подробный анализ многих исторических линий развития, которых мы здесь едва коснулись.

с первого дня являлось *математической драмой в пяти актах*. И в тот же день я «исправил» название работы, заменив первоначальные «части» на «акты».

- Акт I. «Природа пространства»;
- Акт II. «Метрика»;
- Акт III. «Кривизна»;
- Акт IV. «Параллельный перенос»;
- Акт V. «Формы».

Первые четыре акта исполняют обещание предложить замкнутое *геометрическое* ведение в дифференциальную геометрию. Акт IV – это настоящий математический локомотив, благодаря которому становится возможно дать *геометрические доказательства* многих утверждений, высказанных в первых трёх актах.

Некоторые аспекты *предмета рассмотрения* нетрадиционны (во вводном курсе), как и геометрические методы, с помощью которых они исследуются. Здесь мы опишем лишь три наиболее важных примера.

Во-первых, кульминацией *внутри* кульминации в третьем акте является глобальная теорема Гаусса–Бонне – удивительная связь между локальной геометрией и глобальной топологией. Включение этой темы в курс стандартно, но наш подход к её рассмотрению таковым не назовешь. Действительно, мы отмечаем её центральность и фундаментальную важность экстравагантным пуском математических фейерверков: мы посвятили ей *пять* глав и привели *четыре* совершенно различных доказательства, каждое из которых проливает новый свет на результат и на саму природу дифференциальной геометрии.

Во-вторых, переход (обычно совершаемый в вузе) от двумерных поверхностей к n-мерным пространствам (называемым «многообразиями») часто вызывает трудности и вселяет робость в студентов. Глава 29 – вторая по длине в книге – это попытка преодолеть эту пропасть, сосредоточившись (поначалу) на кривизне **3**-мерных многообразий, которые можно представить наглядно; однако же мы не останавливаемся на этом и продолжаем обсуждение, стремясь применить результат к *любому* числу измерений. Этот подход используется для того, чтобы дать интуитивно понятное, геометрическое и вместе с тем технически полное введение в знаменитый *тензор Римана*, который измеряет кривизну n-мерного многообразия.

В-третьих, рассмотрев во всей полноте тензор Римана, мы посчитали, что было бы *аморально* скрыть от читателя его величайший триумф на арене материального мира. Поэтому мы завершаем акт IV довольно длинным *геометрическим* введением в блистательную *общую теорию относительности* Эйнштейна, которая объясняет гравитацию как кривизну 4-мерного пространства-времени, определяемую материей и энергией. Это третья по длине глава книги. В ней не только рассматривается (во всех геометрических деталях) знаменитое *уравнение гравитационного поля* (открытое Эйнштейном в 1915 году), но и объясняются некоторые совсем недавние и волнующие открытия, касающиеся вытекающих из него следствий для чёрных дыр, гравитационных волн и космологии!

А теперь обратимся к акту V, который по характеру резко отличается от предшествующих четырёх актов, поскольку стремится достичь *второй* цели этой работы, совершенно отличной от первой, но не менее амбициозной.

Даже самый рьяный поборник геометрии должен признать, что дьявольская машина Атьи (описанная в эпиграфе) – *необходимое* зло; но раз уж мы *вынуждены* вычислять, будем по крайней мере делать это красиво! По счастью, в начале 1900-х годов Эли Картан разработал новый элегантный метод *вычислений*, первоначально предназначенный для исследования групп Ли, но впоследствии ознаменовавший новый подход к дифференциальной геометрии.

Открытие Картана называется внешним дифференциальным исчислением, а объекты, которые в нём изучаются, дифференцируются и интегрируются – дифференциальными формами; мы же будем говорить просто *формы*. Мы пойдём по стопам Картана и проиллюстрируем мощь и элегантность его метода в последней главе пятого акта – самой длинной в книге, – *передоказав символически результаты, которые были доказаны геометрически в первых четырёх актах*. Но формы позволят нам пройти *дальше*, чем было возможно в первых четырёх актах: в частности, они дают красивый и эффективный метод вычисления тензора Римана n-мерного многообразия с помощью его *2-форм кривизны*.

Однако сначала мы изложим сами идеи Картана, предоставив замкнутое введение в формы, *полностью независимое* от первых четырёх актов. И чтобы не осталось места для недопонимания, *подчеркнём* ещё раз: *первые шесть глав – из семи – пятого акта ни разу не ссылаются на дифференциальную геометрию*! Мы сделали так потому, что формы находят плодотворные применения в самых разных областях математики, физики и других дисциплин. Наша цель – *сделать формы доступными настолько широкому кругу читателей, насколько возможно, даже если основной сферой их интересов* не *является дифференциальная геометрия*.

С этой целью мы стремились рассматривать формы с гораздо более интуитивной и *геометрической* точки зрения, чем это принято. При всём при том у читателя не должно быть иллюзий: основная цель акта V – построить, на *студенческом* уровне, «дьявольскую машину» – удивительно мощный метод *вычислений*.

Безмерная сила этих форм напоминает комплексные числа: из крохотной капли рождается океан – формы Картана объясняют куда больше, чем просил их изобретатель, – верный знак того, что он открыл *платоновы* формы!

Приведём лишь один пример. Формы унифицируют и проясняют *всё* векторное исчисление способом, который стал бы *откровением* для студентов, если бы им было позволено его увидеть. В самом деле, теорема Грина, теорема Гаусса и теорема Стокса – лишь различные проявления *одной* теоремы о формах, которая проще любого из этих частных случаев! Несмотря на неоспоримую важность дифференциальных форм в математике и физике, большинство *студентов* покидают колледж, так ничего и не узнав о них, и я уже давно считаю такую ситуацию скандальной. Лишь в горстке учебников для вузов[18] (по векторному исчислению *или* по дифференциальной геометрии)

[18] См. раздел «Для дополнительного чтения» в конце книги.

есть хоть какое-то упоминание об их существовании, а чаще эту тему относят к магистратуре.

Это достойное сожаления положение вещей сохраняется вот уже вторую сотню лет, и я не вижу никаких признаков грядущих перемен. В качестве ответной реакции акт V ставит целью не столько проклясть тьму, сколько возжечь светильник[19] и постараться убедить читателя, что формы Картана (и стоящие за ними «тензоры») настолько же *просты*, насколько красивы, и что они (и имя Картана!) заслуживают места в стандартном вузовском учебном плане. *Это и есть* бесстыдно амбициозная цель акта V. Выдержав читателя в водах *чистой* геометрии на протяжении первых четырёх актов, мы надеемся, что вычислительный аспект, которому посвящен пятый акт, станет достойной развязкой!

Прежде чем закруглиться, перечислим некоторые организационные подробности.

- Во-первых, я не пытался писать эту книгу как учебник. И хотя я питаю надежду, что найдутся храбрецы, которые всё же решатся использовать её по этому назначению – как ранее произошло с VCA, – всё же моей основной целью было поведать читателю о величественном и достойном внимания предмете со всей честностью и доступностью, на какие я способен, неважно, является читатель робким неофитом или закалённым в битвах экспертом.
- Временами мой выбор тем может показаться эклектичным: например, почему не уделено внимания чарующей и важной теме минимальных поверхностей? Нередко – и в этом случае в частности – причиной является один из двух пунктов (или сразу оба): (1) предметом нашего внимания является внутренняя, а *не* внешняя[20] геометрия и (2) по данному предмету уже имеется отличная литература; в таких случаях я старался давать полезные ссылки в разделе «Для дополнительного чтения» в конце книги.
- Номера *формул* указываются в (КРУГЛЫХ) скобках, а номера *рисунков* – в [КВАДРАТНЫХ].
- ***Определения новых терминов*** записываются полужирным курсивом.
- Для простоты ссылок при пролистывании книги заслуживающие внимания результаты обведены $\boxed{\text{рамкой}}$, а заслуживающие особого внимания – $\boxed{\boxed{\text{двойной рамкой}}}$. Во всей книге имеется лишь горстка результатов настолько важных, что они обведены *тройной* рамкой; надеемся, что читатель получит удовольствие, отыскивая их, как пасхальные яйца.
- Я старался сделать вас, читателя, активным участником развития идей. Например, по мере разворачивания доказательства я часто и вполне сознательно помещал парочку логических опор достаточно далеко друг от

[19] Наш светильник, безусловно, не первый. Когда наша работа близилась к завершению, Фортни (Fortney 2018) опубликовал целую книгу, посвященную той же цели. Однако в работе Фортни нет обсуждения дифференциальной геометрии, и насчитывающая 461 страницу книга Фортни значительно длиннее 100-страничного введения в формы, составляющего пятый акт настоящей книги.

[20] Значения слов «внутренняя» и «внешняя» объясняются в разделе 1.4.

друга, заставив вас сделать паузу и приложить небольшое усилие, чтобы дотянуться от одной до другой. Такие места помечены словом «[докажите]»; зачастую они не требуют ничего большего, чем простое вычисление или недолгое размышление.
- Наконец, мы настоятельно рекомендуем читателю пользоваться всеми преимуществами *предметного указателя*; в его создание было вложено немало терпения и любви!

В завершение этого пролога мы опишем более широкую философскую цель работы, выходящую за рамки конкретной математики, которую мы стремились объяснить.

Одно из прав [*sic*], присущих переходу от математической юности к зрелости, – умение различать *истинные* и *ложные чудеса*. Сама математика исполнена первыми, но и примеров вторых тоже хватает: «Не могу поверить, что все эти уродливые члены взаимно уничтожились, оставив такой простой и красивый ответ!» или «Не могу поверить, что это у этого запутанного выражения такой простой смысл!».

В такой ситуации надо не поздравлять себя, а стыдливо склонить голову. Ибо если все эти уродливые члены взаимно уничтожились, значит, *они вообще не должны были появиться*! А если это запутанное выражение имеет такой простой смысл, то *оно никогда и не должно было быть запутанным*!

Что до меня лично, должен со смущением признаться, что мой математический пубертатный возраст затянулся далеко за 20, а взрослеть я *начал*, только поступив в аспирантуру благодаря изумительному двойному влиянию Пенроуза и моего близкого друга Джорджа Бэрнетт-Стюарта, подопечного Пенроуза.

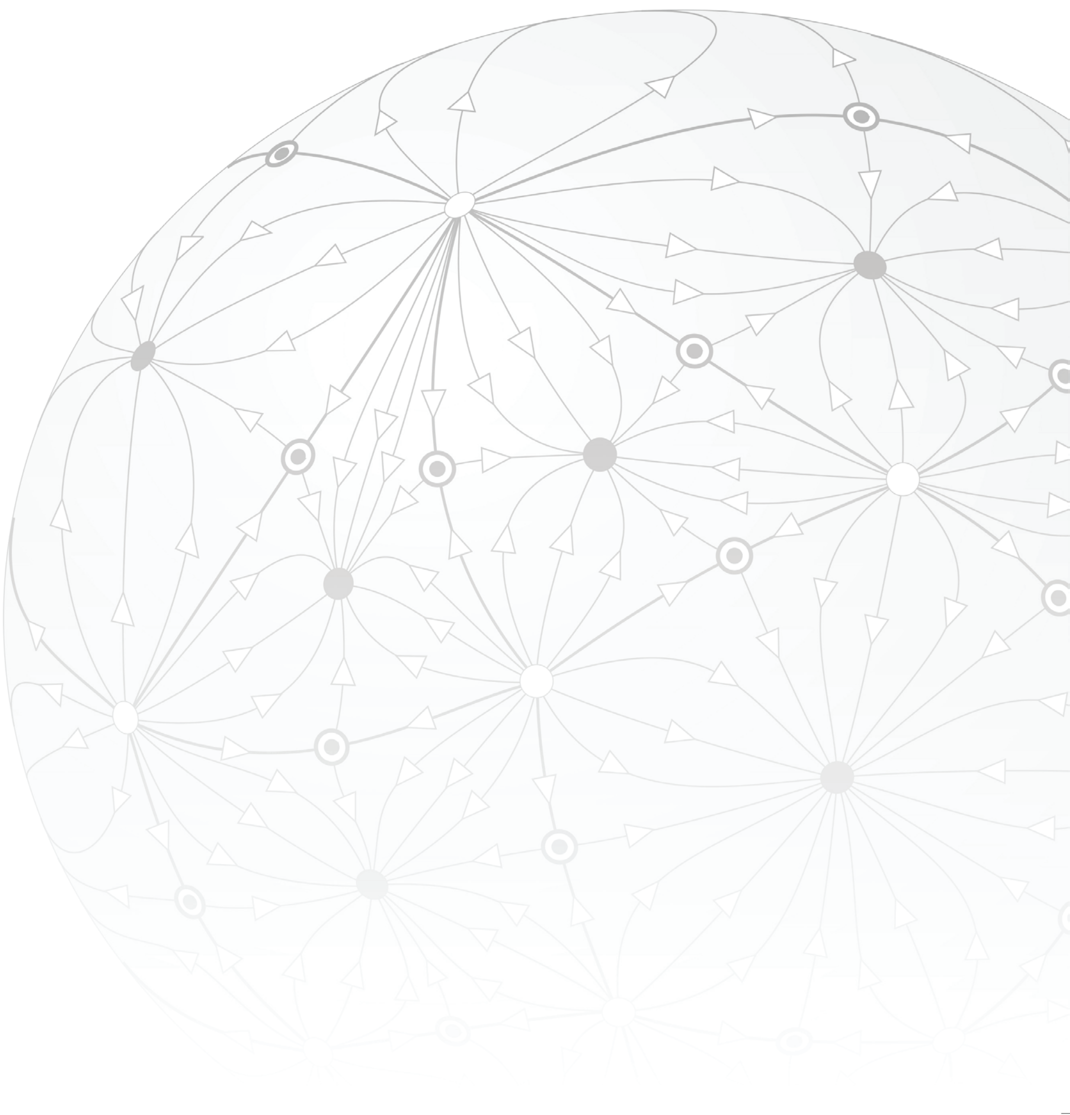
Платонические формы математической реальности всегда поражают совершенной красотой и совершенной простотой; преходящие же впечатления, напротив, являются проявлением нашего собственного несовершенства. Я надеюсь, что эта книга побудит читателя смирить гордыню перед лицом этого несовершенства, точно так же, как два моих друга подтолкнули меня на этот путь много лет назад среди сюрреалистических, в духе Эшера, шпилей Оксфорда.

Т. Н.

Милл Вэлли, Калифорния
День гравимассы, 2019

АКТ I

Природа пространства



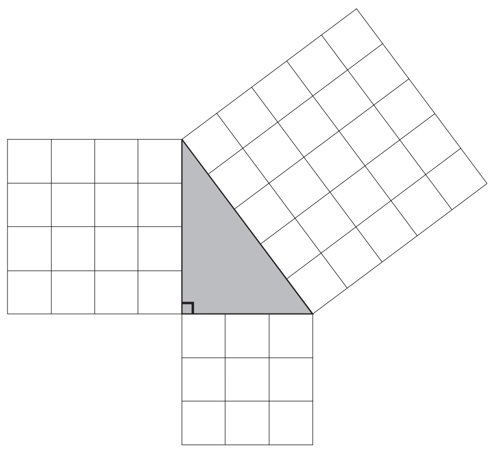
Глава 1

Евклидова и неевклидова геометрия

1.1 Евклидова и гиперболическая геометрия

Дифференциальная геометрия – это приложение математического анализа к геометрии пространства, являющегося *искривлённым*. Но чтобы понять искривлённое пространство, мы сначала должны попытаться понять пространство, являющееся *плоским*.

Мы живём в мире, заполненном искривлёнными предметами, и если ребенок спросит, что означает слово «плоский», мы, скорее всего, в ответ упомянем *отсутствие* кривизны: гладкая поверхность *без* горбов и впадин. Тем не менее первых математиков, похоже, заворожили исключительная простота и однородность плоскости, и они были вознаграждены поразительно красивыми фактами о конструируемых на ней геометрических фигурах. Обладая возможностью оглянуться назад, мы теперь можем видеть, что некоторые из этих фактов характеризуют свойство плоскости быть плоской.



[1.1] *Теорема Пифагора: геометрия равенства* $3^2 + 4^2 = 5^2$

Один из самых ранних и наиболее знаменательных фактов такого рода – теорема Пифагора. Безусловно, древние должны были испытывать благоговейный восторг, какой испытывает любой не лишенный чувств человек в наше время, осознав, что простое соотношение между *числами*

$$3^2 + 4^2 = 5^2$$

на самом деле имеет *геометрический* смысл, показанный на рис. [1.1][1].

Хотя сам Пифагор жил в Греции примерно в 500 году до н. э., теорема, носящая его имя, была открыта гораздо раньше, в разных местах, разбросанных

[1] Повторим сказанное в прологе: номера формул заключаются в круглые скобки (…), а номера рисунков – в квадратные […].

[1.2] *Plimpton 322: глиняная табличка, содержашая пифагоровы тройки. Датируется 1800 годом до н. э.*

по всему миру. Самый ранний из известных примеров этого знания записан на вавилонской глиняной табличке (в каталоге числится под названием «Plimpton 322»), показанной на рис. [1.2], которая была обнаружена во время раскопок на территории, ныне занимаемой Ираком, и датируется примерно 1800 годом до н. э.

На этой табличке перечислены **пифагоровы тройки**[2]: целые числа (a, b, h), такие что h является гипотенузой прямоугольного треугольника со сторонами a и b и потому $a^2 + b^2 = h^2$. Некоторые из этих древних примеров содержат весьма большие числа, и ясно, что они были найдены не случайно, а в результате какого-то математического процесса порождения решений. Например, в четвертой строке таблички записан тот факт, что $13\,500^2 + 12\,709^2 = 18\,541^2$.

Более глубокие знания, лежащие в основе этих древних результатов, неизвестны[3], но чтобы отыскать первые свидетельства «современного» логического, дедуктивного подхода к математике, мы должны совершить скачок на 1200 лет в будущее от времён глиняных табличек. Учёные полагают, что Фалес Милетский (ок. 600 года до н. э.) первым выдвинул идею выведения новых результатов из уже установленных ранее, т. е. построения логической цепочки, начинающейся с небольшого числа чётко сформулированных предположений, или ***аксиом***.

Совершив ещё один скачок, на 300 лет после Фалеса, мы обнаружим один из самых совершенных образчиков этого нового подхода в *Началах* Евклида, датируемых 300 годом до н. э. Эта работа ставила целью привнести порядок, ясность и строгость в геометрию посредством вывода всех фактов из пяти

---

2 На самом деле на табличке записаны только два члена (a, h) каждой тройки (a, b, h).

3 В семнадцатом веке Ферма и Ньютон реконструировали и обобщили геометрический метод нахождения общего решения, приписываемый Диофанту. См. упражнение 5.

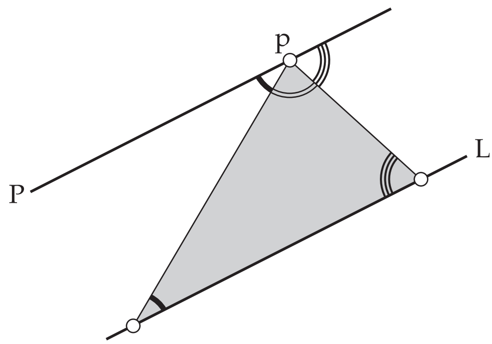
простых аксиом, пятая и последняя из которых относилась к параллельным прямым.

Две прямые называются *параллельными*, если они не пересекаются, а пятая аксиома Евклида[4] иллюстрируется на рис. [1.3]:

> ***Аксиома параллельных прямых.*** *Через любую точку* p, *не лежащую на прямой* L, *можно провести одну и только одну прямую* P, *параллельную* L.

Но по своему характеру эта аксиома, очевидно, сложнее и не так очевидна, как остальные четыре, и математики начали долгую борьбу за то, чтобы избавиться от неё как от изначального предположения, стремясь показать, что она является логическим *следствием* первых четырёх аксиом.

Эта проблема оставалась неразрешенной следующие *2000 лет*. Проходили века, предпринимались многочисленные попытки доказать аксиому параллельных прямых, напряжённость этих усилий достигла апогея в 1700-е годы, но всё было тщетно.



[1.3] *Аксиома параллельных прямых Евклида:* P *– единственная прямая, параллельная* L *и проходящая через* p, *и сумма углов треугольников равна* π

Зато попутно появилось много полезных *эквивалентов* этой аксиомы. Например: *существуют подобные треугольники разного размера* (Валлис в 1663 году; см. Stillwell (2010)). Но самая первая эквивалентная формулировка имеется уже у Евклида, и до сих пор её учат дети в каждой школе: *сумма углов треугольника равна двум прямым углам*. См. рис. [1.3].

Объяснение этих неудач было дано лишь около 1830 года. Положив конец путешествию, начатому 4000 лет назад, Николай Лобачевский и Янош Бойяи независимо объявили об открытии совершенно новой формы геометрии (которая теперь называется ***гиперболической геометрией***), которая разворачивается на новом виде плоскости (ныне называемой ***гиперболической плоскостью***). В этой геометрии первые четыре аксиомы Евклида имеют место, а аксиома параллельных – *нет*. Вместо этого справедливо следующее утверждение:

> ***Гиперболическая аксиома.*** *Через точку* p *проходит по меньшей мере две параллельные прямые, не пересекающие* L. (1.1)

Эти первопроходцы исследовали логические следствия из этой аксиомы и с помощью чисто абстрактных рассуждений пришли к удивительным ре-

---

[4] Евклид сформулировал эту аксиому в другом, но логически эквивалентном виде.

[1.4] *Иоганн Генрих Ламберт (1728–1777)*

зультатам в новой весьма содержательной геометрии, которая разительно отличалась от геометрии Евклида.

Многие их предшественники, и прежде всего Саккери (в 1733 году; см. Stillwell 2010) и Ламберт (в 1766; см. Stillwell 2010), уже открыли некоторые из следствий (1.1), но своей задачей при исследовании этих следствий считали поиск противоречия, которое, как они думали, наконец-то докажет, что евклидова геометрия единственно истинная.

Безусловно, Саккери верил, что нашёл очевидное противоречие, когда опубликовал свой труд «Евклид, очищенный от всех пятен». Но случай Ламберта далеко не так ясен, и, быть может, он является невоспетым героем во всей этой истории. Его результаты так глубоко проникли в толщу этой новой геометрии, что кажется немыслимым, что хотя бы временами он сам не верил в реальность того, что делает. Но независимо от того, чем он руководствовался и во что верил[5], Ламберт (его портрет см. на рис. [1.4]), безусловно, первым открыл замечательный факт[6], касающийся суммы углов треугольника в предположении аксиомы (1.1), и этот его результат будет центральным для многого из того, что последует в акте II.

Тем не менее Лобачевский и Бойяи заслуживают своей славы, поскольку были первыми, кто осознал и всем сердцем принял идею о том, что они открыли совершенно новую непротиворечивую неевклидову геометрию. Но что эта новая геометрия *означала* и для чего могла бы быть полезна, даже они не могли сказать[7].

Удивительно и примечательно, что именно *дифференциальная геометрия искривлённых поверхностей* смогла окончательно разрешить эти вопросы. Как мы

---

[5] Я благодарен Роджеру Пенроузу, открывшему мне глаза на то, что Ламберт заслуживает большего уважения, чем ему обычно воздается. Для этого Пенроуз привел следующую аналогию: «Разве мы не должны воздать должное Эйнштейну за космологическую постоянную, пусть даже причины, по которым он её ввёл, были неверны? И следует ли порицать его за то, что впоследствии он отрёкся от неё, назвав “величайшей ошибкой своей жизни”? А как насчёт самой общей теории относительности, в правильности которой Эйнштейн с годами начал всё больше сомневаться (и считал необходимым заменить какой-то единой теорией поля, не содержащей сингулярностей)?» [Частное сообщение.]

[6] Для тех, кому не терпится, это формула (1.8).

[7] Лобачевский на самом деле применил эту геометрию для вычисления ранее неизвестных интегралов, но (по крайней мере в ретроспективе) это конкретное приложение следует рассматривать как сравнительно незначительное.

объясним ниже, в 1868 году итальянский математик Эудженио Бельтрами наконец сумел дать гиперболической геометрии конкретную интерпретацию, заложив прочный и интуитивно понятный фундамент, на котором с тех пор она стала расти и расцветать. Печально, но ни Лобачевский, ни Бойяи не дожили до этого дня, первый умер в 1856 году, второй – в 1860-м.

Эта неевклидова геометрия на самом деле в разное время уже проявляла себя в различных разделах математики, но всегда маскировалась подо что-то другое. Анри Пуанкаре (начиная с 1882 года) не только сорвал с неё маскировку, но и первым осознал и начал использовать всю её мощь в таких разнородных областях, как комплексный анализ, дифференциальные уравнения, теория чисел и топология. То, что она по-прежнему живее всех живых и занимает одно из центральных мест в математике XX и XXI веков, демонстрируют работа Тёрстона по 3-многообразиям, доказательство *Великой теоремы Ферма*, данное Уайлзом, и найденное Перельманом доказательство *гипотезы Пуанкаре* (как частного случая *гипотезы о геометризации* Тёрстона) – и это всего лишь три примера.

В акте II мы опишем прорыв Бельтрами, а также природу гиперболической геометрии, а сейчас исследуем другую, более простую разновидность неевклидовой геометрии, известную ещё древним.

1.2 Сферическая геометрия

Для построения неевклидовой геометрии мы должны отринуть существование единственной параллельной прямой. Гиперболическая аксиома допускает существование двух и более параллельных прямых, но есть ещё одна логическая возможность – *ни одной* параллельной прямой:

> ***Сферическая аксиома.*** *Через точку* p *не проходит* ни одной *прямой, параллельной* L*: любая прямая пересекает* L. (1.2)

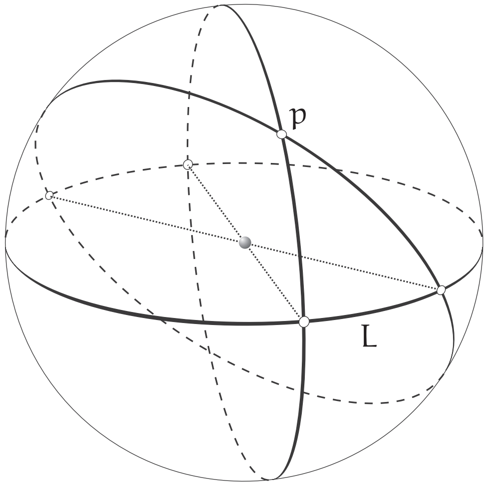
Таким образом, на самом деле имеется *две* неевклидовые геометрии[8]: сферическая и гиперболическая.

Как следует из самого названия, сферическую геометрию можно реализовать на поверхности сферы – обозначаемой $\mathbb{S}^2$ в случае *единичной* сферы, – которую мы можем мыслить себе как поверхность Земли. Что на этой сфере является аналогом «прямой линии», соединяющей две точки на поверхности? Ответ: кратчайший путь между ними! Но если вы хотите доплыть или долететь, например, из Лондона до Нью-Йорка, то какой путь будет кратчайшим?

Ответ, известный ещё античным мореходам, – кратчайшим путём является дуга окружности ***большого круга***, например экватора, полученного разрезанием сферы плоскостью, проходящий через её центр. На рис. [1.5] мы

---

[8] Тем не менее читателю следует знать, что в современном употреблении «неевклидова геометрия» обычно является синонимом «гиперболической геометрии».



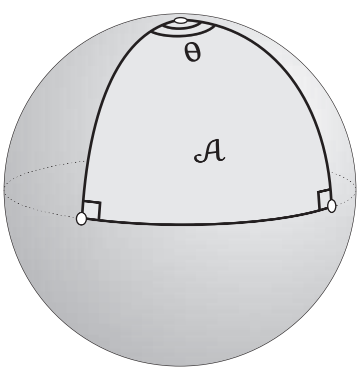
[1.5] *Большие круги $\mathbb{S}^2$ пересекаются в двух противоположных (антиподальных) точках*

выбрали в качестве L экватор, и ясно, что утверждение (1.2) выполняется: каждая прямая, проходящая через p, пересекает L в двух ***антиподальных*** (т. е. диаметрально противоположных) точках.

На плоскости кратчайший путь является также *самым прямым*, и то же самое верно для сферы: в некотором точном смысле, который мы обсудим ниже, траектория, проходящая по большому кругу, не отклоняется ни вправо, ни влево в своём прохождении по сферической поверхности.

Существуют и другие способы построения больших кругов на поверхности Земли, не требующие думать о том, как провести плоскость через недоступный центр Земли. Например, на глобусе отправиться в путешествие по большому кругу можно, закрепив один конец нити в Лондоне и натянув нить, не отрывая её от поверхности, так чтобы другой конец совместился с Нью-Йорком. Натянутая нить автоматически прочертит кратчайший и самый прямой путь – более короткую[9] из двух дуг, на которые окружность большого круга делят оба города.

Определив, что является аналогом прямой линии, мы можем «строить геометрию» на поверхности сферы. Например, если даны три точки на поверхности Земли, то их можно соединить дугами окружностей большого круга и получить «треугольник». На рис. [1.6] этот случай показан, когда одна вершина совпадает с северным полюсом, а две другие находятся на экваторе.



[1.6] *Особенно простой «треугольник» на сфере*

Но если эта неевклидова сферическая геометрия уже использовалась древними мореплавателями для навигации в океанах и астрономами для составления карт сферического ночного неба, то что такого шокирующего и нового было в неевклидовой геометрии Лобачевского и Бойяи?

Ответ состоит в том, что сферическая геометрия считалась просто унаследованной от *евклидовой* геометрии трёхмерного пространства, в котором располагается сфера. В то время никто не воспринимал внутреннюю двумерную геометрию сферы как альтернативу евклидовой

9 Если точки антиподальные, например Северный и Южный полюсы, то обе дуги будут иметь одинаковую длину. Кроме того, большой круг в этом случае не единственный: любой меридиан является большим кругом, соединяющим полюса.

плоскости. Она нарушала не только пятую аксиому, но и куда более фундаментальную (первую аксиому Евклида), утверждающую, что через любые две точки можно провести единственную прямую. Это не так, если точки антиподальные.

С другой стороны, гиперболическая геометрия Лобачевского и Бойяи была куда более серьёзным ударом по евклидовой геометрии, поскольку содержала знакомые прямые бесконечной длины и тем не менее щеголяла несколькими параллельными, нелепыми суммами углов и многими другими результатами, которые, казалось, не имели никакого смысла. Однако же 21-летний Бойяи был уверен в своих открытиях и горд ими, он писал отцу: «*Из ничего я создал другой, совершенно новый мир*».

У этой истории трагический финал. Отец Бойяи был другом Гаусса и отправил ему сообщение о том, чего достиг Янош. К тому времени Гаусс и сам сделал важные открытия в этой области, но хранил их в тайне. В любом случае Янош видел дальше Гаусса. Доброе слово, публично сказанное Гауссом, самым знаменитым тогда математиком в мире, обеспечило бы юному математику блестящее будущее. Но природа и воспитание иногда вливают необычайные математические таланты в сосуд, попорченный самыми обыкновенными человеческими недостатками, и реакция Гаусса на удивительные открытия Бойяи оказалась до крайности мелочной и эгоистичной.

Во-первых, Гаусс шесть месяцев держал Бойяи в подвешенном состоянии, а затем ответил следующее:

> Теперь кое-что о работе твоего сына. Ты, наверное, испытаешь минутный шок, когда я начну с того, что *не могу похвалить её*, но я не могу поступить иначе, потому что хвалить её значило бы хвалить себя. Всё содержание статьи, весь путь, пройденный твоим сыном, и все результаты, к которым он пришёл, почти во всем совпадают с моими собственными размышлениями, которые занимали меня последние 30–35 лет.

Гаусс, однако, «поблагодарил» сына Бойяи за то, что тот «избавил его от необходимости»[10] записывать теоремы, о которых он знал уже несколько десятилетий.

Янош Бойяи так и не оправился от удара, нанесённого Гауссом, и больше уже никогда не занимался математикой[11].

---

[10] Ещё раньше Гаусс точно так же опорочил открытие Абелем эллиптических функций; см. Stillwell (2010, стр. 236).

[11] Если эта история наводит на вас тоску, то обратите свои мысли к духоподъёмному примеру противоположного толка, который подаёт нам Леонард Эйлер. Интеллектуальный вулкан, извергающий донельзя оригинальные мысли (с некоторыми из которых мы будем иметь случай познакомиться ниже), обладал к тому же доброй и щедрой душой. Приведем лишь один, похожий пример. Когда никому тогда ещё не известный 19-летний Лагранж написал ему об открытиях в области вариационного исчисления, пересекающихся с его собственными, Эйлер ответил: «…Я и сам пришёл к этим выводам. Но решил придержать их до тех пор, когда Вы опубликуете свои результаты, потому что ни в коем случае не хочу отнимать у Вас славу, которую Вы заслуживаете». См. Gindikin (2007, стр. 216). Кстати говоря, Эйлер лично вмешался, чтобы спасти карьеру Ламберта!

1.3 Дефект сферического треугольника

Мы уже говорили, что аксиома параллельных эквивалентна тому, что сумма углов треугольника равна π. Следовательно, сферическая и гиперболическая аксиомы должны приводить к геометриям, в которых сумма углов *не* равна π. Чтобы количественно выразить отход от евклидовой геометрии, определим ***дефект*** как величину $\mathcal{E}$, на которую сумма углов превосходит π:

$$\boxed{\mathcal{E} \equiv (\text{сумма углов треугольника}) - \pi.}$$

Например, для треугольника на рис. [1.6] $\mathcal{E} = (\theta + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}) - \pi = \theta$.

Важнейшее озарение наступает, если сравнить дефект треугольника с его площадью $\mathcal{A}$. Обозначим радиус сферы R. Так как треугольник занимает долю $(\theta/2\pi)$ северной полусферы, $\mathcal{A} = (\theta/2\pi)\, 2\pi R^2 = \theta R^2$. Таким образом,

$$\boxed{\mathcal{E} = \frac{1}{R^2}\mathcal{A}.} \tag{1.3}$$

[1.7] *Томас Хэрриот (1560–1621)*

В 1603 году английский математик Томас Хэрриот (см. рис. [1.7]) совершил замечательное открытие[12], установив, что это равенство имеет место для *любого* треугольника Δ на сфере; см. рис. [1.8a]. Элементарное, но изобретательное рассуждение Хэрриота[13] выглядит следующим образом.

Окружности больших кругов, на которых лежат стороны Δ, делят поверхность сферы на восемь треугольников, четыре из которых обозначены Δ, Δ_α, Δ_β, Δ_γ, а остальные являются конгруэнтными и антиподальными им. Это ясно видно на рис. [1.8b]. Поскольку площадь сферы равна $4\pi R^2$, мы заключаем, что

$$\mathcal{A}(\Delta) + \mathcal{A}(\Delta_\alpha) + \mathcal{A}(\Delta_\beta) + \mathcal{A}(\Delta_\gamma) = 2\pi R^2. \tag{1.4}$$

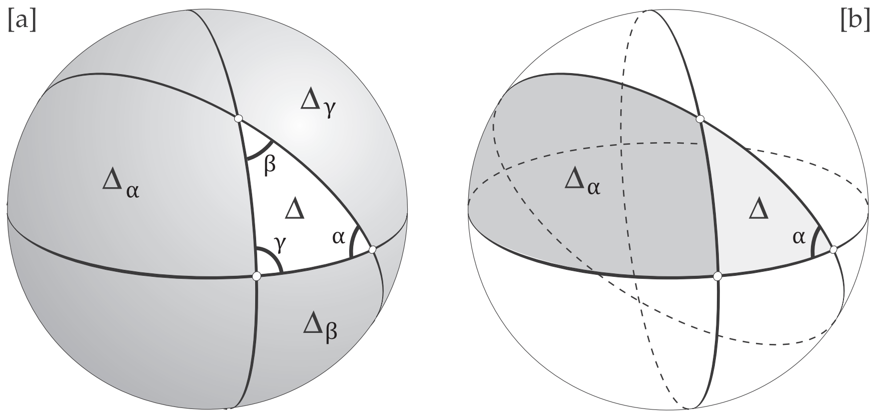
С другой стороны, из рис. [1.8b] видно, что Δ и Δ_α образуют клин, площадь которого равна доле $(\alpha/2\pi)$ площади сферы:

$$\mathcal{A}(\Delta) + \mathcal{A}(\Delta_\alpha) = 2\alpha R^2.$$

---

12 Это открытие очень часто приписывают Жирару, который повторил его почти 25 годами позже.

13 Это рассуждение было переоткрыто Эйлером в 1781 году.



[1.8] *Теорема Хэрриота (1603):* $\mathcal{E}(\Delta) = \mathcal{A}(\Delta)/R^2$

Аналогично

$$\mathcal{A}(\Delta) + \mathcal{A}(\Delta_\beta) = 2\beta R^2,$$

$$\mathcal{A}(\Delta) + \mathcal{A}(\Delta_\gamma) = 2\gamma R^2.$$

Складывая последние три равенства, находим

$$3\mathcal{A}(\Delta) + \mathcal{A}(\Delta_\alpha) + \mathcal{A}(\Delta_\beta) + \mathrm{A}(\Delta_\gamma) = 2(\alpha + \beta + \gamma)R^2. \tag{1.5}$$

И наконец, вычитая (1.4) из (1.5), получаем

$$\mathcal{A}(\Delta) = R^2(\alpha + \beta + \gamma - \pi) = R^2\mathcal{E}(\Delta),$$

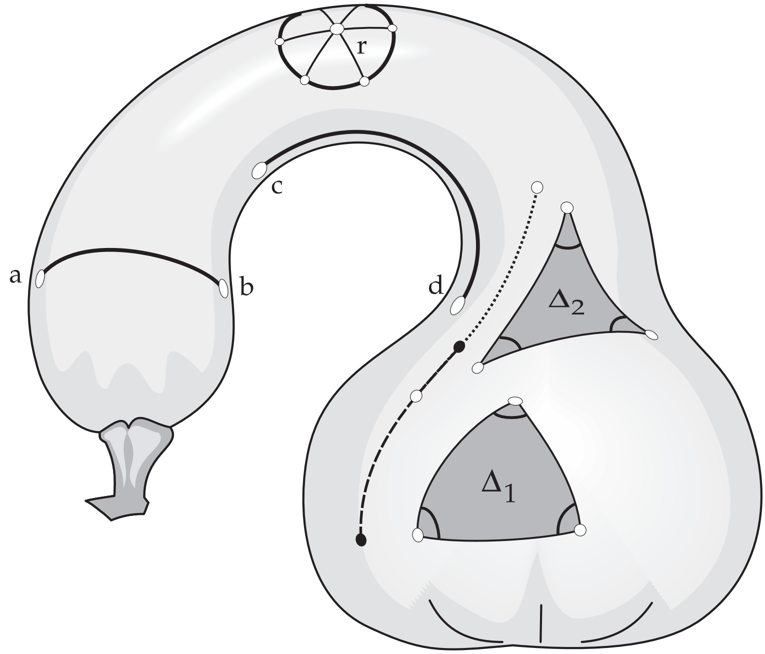
что и доказывает (1.3).

1.4 Внутренняя и внешняя геометрия искривлённых поверхностей

Математика, связанная с построением «прямой линии» посредством натягивания нити, будет подробно исследована ниже в этой книге. А пока просто заметим, что это построение с равным успехом можно применить к *не*сферической поверхности, например к тыкве-горлянке на рис. [1.9].

Так же, как и на сфере, мы натягиваем нить на поверхности, находя тем самым кратчайший и самый прямой путь между двумя точками, например a и b. При условии что нить может свободно скользить по поверхности, отсутствие провисания гарантирует, что получающийся путь кратчайший из возможных. Заметим, что в случае пути cd мы должны вообразить, что нить проходит внутри поверхности.

Поэтому, чтобы единообразно рассматривать любые возможные пары точек, лучше представлять себе, что поверхность составлена из двух слоёв с тонким промежутком между ними, а нить прокладывается в этом промежутке. С другой стороны, эта идея полезна лишь для мысленных, а не фактических экспериментов. Вскоре мы преодолеем это препятствие, предложив *практический*



[1.9] Внутренняя геометрия *поверхности тыквы-горлянки:* **геодезические** *– эквиваленты прямых линий, а образованные ими треугольники могут иметь дефект любого знака, зависящего от того, как изгибается поверхность:* $\mathcal{E}(\Delta_1) > 0$, а $\mathcal{E}(\Delta_2) < 0$

метод построения кратчайших кривых на поверхности физического объекта, даже если участок поверхности изгибается не так, как нужно, чтобы нить, проложенная по внешней стороне объекта, была туго натянута.

Эти кратчайшие пути на искривлённой поверхности эквивалентны прямым линиям на плоскости, они будут играть важнейшую роль в этой книге и называются ***геодезическими***. А чтобы привыкнуть к употреблению нового слова, мы можем сказать, что геодезическими на плоскости являются прямые линии, а на сфере – окружности большого круга.

Но даже на сфере определение «геодезической» как кривой *минимальной длины* предварительное, потому что, как мы видим, неантиподальные точки соединены *двумя* проходящими через них дугами окружности большого круга: короткой (это *действительно* кратчайший путь) и длинной. И тем не менее длинная дуга ничуть не в меньшей степени является геодезической, чем короткая. На сфере есть и дополнительное осложнение – антиподальные точки соединены *несколькими* геодезическими, и такая *неединственность* имеет место и на более общих поверхностях. А вот что *действительно* верно, так это то, что через любые две точки, *достаточно близкие друг к другу*, проходит единственный отрезок геодезической, являющийся кратчайшим путём между ними.

Как отрезок прямой на плоскости можно продолжить до бесконечности в обе стороны, прикладывая перекрывающие его отрезки, так и отрезок геодезической можно продолжить на искривлённой поверхности, и это продолжение единственно. Например, на рис. [1.9] мы продолжили штриховой отрезок геодезической, соединяющий чёрные точки, приложив перекрывающий его пунктирный отрезок между белыми точками.

Из-за тонкостей, связанных с характеристикой геодезических как кривых минимальной длины, мы вскоре дадим альтернативную, чисто *локальную* характеристику, основанную на прямизне.

Со всеми сделанными оговорками теперь ясно, как следует определять расстояние на поверхностях типа изображённой на рис. [1.9]: расстояние между двумя достаточно близкими точками a и b – это длина соединяющего их отрезка геодезической.

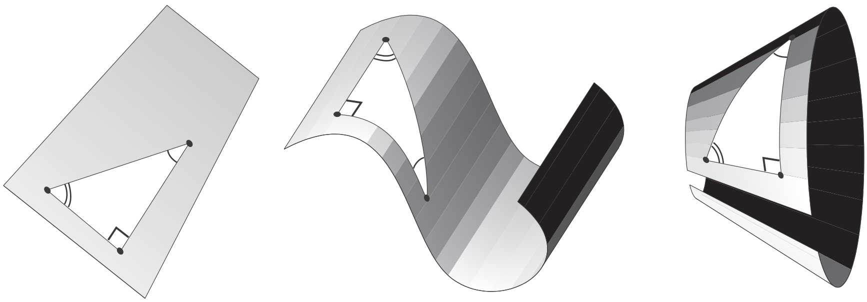
На рис. [1.9] можно определить, к примеру, «окружность радиуса r с центром c» как геометрическое место точек, отстоящих от c на расстояние r. Чтобы построить такую ***геодезическую окружность***, мы можем взять кусок нити длиной r, закрепить один конец в точке c, а затем (туго натягивая нить) тянуть другой конец по поверхности. Но как сумма углов треугольника больше не равна π, так и длина окружности теперь не равна $2\pi r$. Предлагаем вам самостоятельно убедиться в том, что длина показанной на рисунке окружности *меньше* $2\pi r$.

Если на поверхности даны три точки, то мы можем соединить их геодезическими, так что образуется ***геодезический треугольник***; на рис. [1.9] показано два таких треугольника, Δ_1 и Δ_2.

- Глядя на углы Δ_1, кажется очевидным, что их сумма *больше* π, так что $\mathcal{E}(\Delta_1) > 0$, как у треугольника в сферической геометрии.
- С другой стороны, не менее очевидно, что сумма углов Δ_2 *меньше* π, $\mathcal{E}(\Delta_2) < 0$, и, как будет объяснено позже, такое противоположное поведение действительно характерно для треугольников в *гиперболической геометрии*. Отметим также, что если построить окружность в этой седловидной части поверхности, то её длина будет больше $2\pi r$.

Понятие геодезической относится к так называемой ***внутренней геометрии*** поверхности – принципиально новому взгляду на геометрию, введённому Гауссом (1827). Под этим понимается геометрия, известная крохотным, подобным муравьям разумным (но двумерным!) существам, обитающим *на* этой поверхности. Как мы обсудили выше, эти существа могут, например, определить геодезическую «прямую линию», соединяющую две близкие точки, как кратчайший путь в их мире (на поверхности) между этими двумя точками. Отправляясь от этого, они могут затем определить треугольники и т. д. При таком определении ясно, что внутренняя геометрия не изменяется при изгибании поверхности (как листа бумаги), в результате которого она занимает разные положения в пространстве, коль скоро расстояния *на* поверхности не растягиваются и не искажаются ещё каким-то способом. Существа, живущие на поверхности, вообще не способны обнаружить такие изменения.

При таком изгибании так называемая ***внешняя геометрия*** (как поверхность располагается в пространстве) почти наверняка изменится. См. рис. [1.10]. Слева мы видим плоский лист бумаги, на котором нарисован треугольник Δ с углами $(\pi/2)$, $(\pi/6)$ и $(\pi/3)$. Разумеется, $\mathcal{E}(\Delta) = 0$. Очевидно, мы можем изо-



[1.10] *Изгибание листа бумаги изменяет внешнюю геометрию, но внутренняя геометрия остаётся неизменной*

гнуть этот плоский лист, так что получится одна из двух (внешне) искривлённых поверхностей, изображённых справа[14]. Однако *внутреине* эти поверхности не претерпели никаких изменений – они по-прежнему плоские, как блин! Нарисованные на этих поверхностях треугольники (в которые Δ переходит при нашем изгибании бумаги без растяжения) идентичны тем, которые разумные муравьи построили бы с помощью геодезических, и в обоих случаях $\mathcal{E} = 0$: геометрия этих поверхностей евклидова.

Даже если мы возьмём участок поверхности, который внутренне *искривлёи*, так что для нарисованного на нём треугольника $\mathcal{E} \neq 0$, всё равно в общем случае его можно будет изогнуть, не растянув и не порвав, и, стало быть, изменить внешнюю геометрию, оставив внутреннюю неизменной. Например, разрежьте мячик для настольного тенниса пополам и аккуратно сожмите ободок одной полусферы, превратив окружность в овал (но не в овал, лежащий в одной плоскости).

1.5 Построение геодезических на основе их прямизны

Мы уже упоминали тот факт, что геодезические на поверхности имеют по меньшей мере две характеристики, роднящие их с прямыми на плоскости: (1) они дают *кратчайший* путь между двумя точками, отстоящими не слишком далеко друг от друга, *и* (2) они дают «самый прямой» путь между этими точками. В этом разделе мы постараемся пояснить, что имеется в виду под «прямизной», и это приведёт нас к очень простому и *практичиому* методу построения геодезических на физической поверхности.

В большинстве учебников по дифференциальной геометрии таким материям уделяется мало внимания, и, быть может, по этой причине построение, которое мы сейчас опишем, на удивление мало известно в литературе[15]. Мы же,

---

[14] Но заметьте, что для получения самой правой фигуры мы должны сначала подрезать края прямоугольника.

[15] Одно из редких исключений – книга Henderson (1998), которую мы настоятельно рекомендуем. Дополнительные сведения см. в разделе «Для дополнительного чтения» в конце книги.

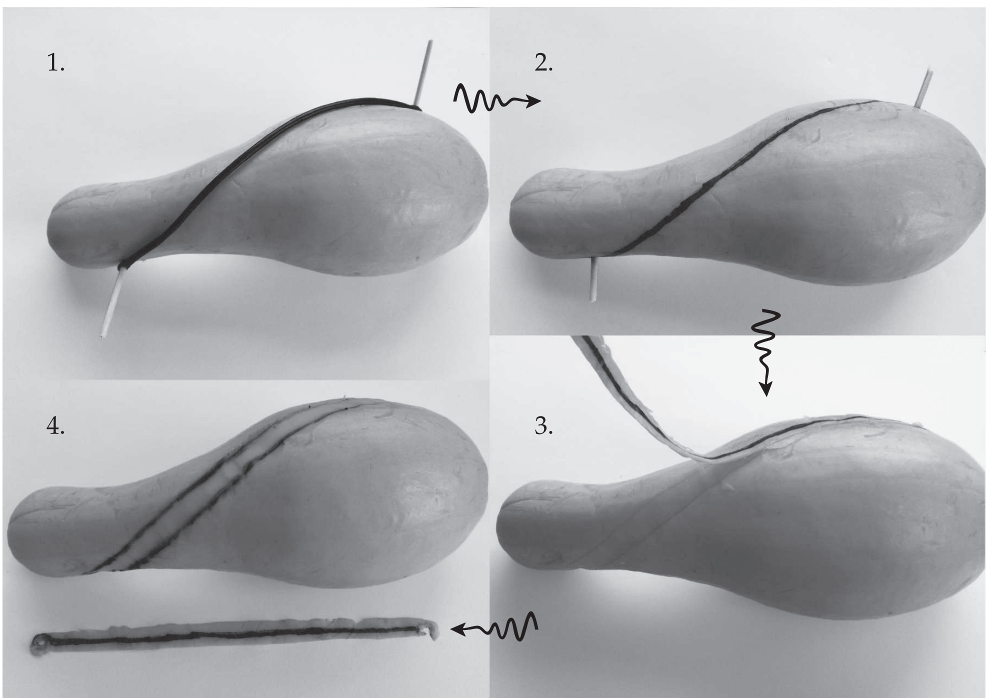
напротив, *побуждаем* вас исследовать идеи всеми доступными средствами: теоретическое построение, рисование, компьютерные эксперименты и (особенно!) физические эксперименты с фактическими поверхностями. Ближайшая овощная лавка может снабдить вас лабораторными предметами, имеющими разные интересные формы, как, например, жёлтый кабачок, изображённый на рис. [1.11].

Теперь воспользуемся этим овощем, чтобы сделать очевидной скрытую прямизну геодезической в эксперименте, который, как мы надеемся, вы повторите самостоятельно.

1. На поверхности фрукта или овоща постройте геодезическую, натянув нить.
2. Ручкой прочертите траекторию нити, а затем уберите нить.
3. Сделайте неглубокие надрезы по обе стороны (и рядом) вычерченной траектории, а затем специальным инструментом или небольшим ножом срежьте узкую полоску кожуры между обоими разрезами.
4. Положите эту полоску на стол и полюбуйтесь на удивительное явление: геодезическая внутри срезанной полоски стала *прямой линией* на плоскости!

Но почему?!

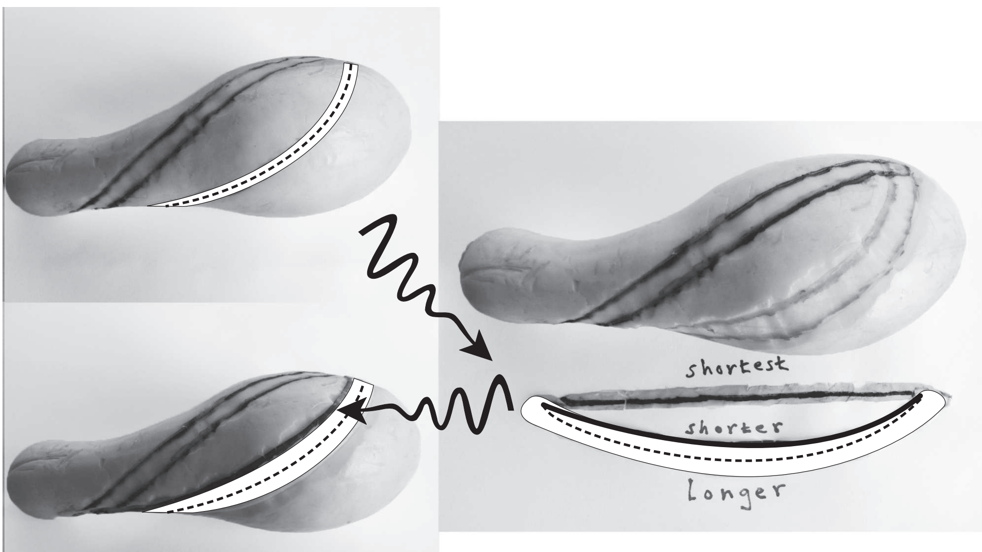
Чтобы понять, в чём тут дело, сначала поясним, что хотя полоска может изгибаться в направлении, перпендикулярном поверхности (т. е. перпендикулярно самой себе), она станет *жёсткой*, если мы попытаемся изогнуть её вбок,



[1.11] *На искривленной поверхности фрукта или овоша вырежьте узкую полоску вокруг геодезической, а затем разложите ее на столе. Вы получите прямую линию на плоскости!*

в направлении, касательном к поверхности. А теперь проведём доказательство от противного и представим, что произошло бы, если бы срезанная геодезическая *не* стала бы прямой линией, будучи положена на стол. Одновременно недостатком и достоинством таких физических экспериментов является то, что они просто не *позволят* сделать что-то невозможное, а именно это и нужно в математическом доказательстве от противного. Тем не менее *предположим*, что существует геодезический путь типа пунктирной линии слева вверху на рис. [1.12] и что после срезания и укладывания на стол (справа) этот путь *не* стал прямой линией.

Кратчайшим путём между концами этой пунктирной (непрямой) плоской кривой является соединяющая их прямая. (Как показано на рисунке, это траектория *истинной* геодезической, которую мы уже нашли с помощью нити, – но сделаем вид, что мы этого ещё не знаем!) Таким образом, мы можем укоротить пунктирную кривую, немного деформировав её в направлении этого прямого, кратчайшего пути, что даст изображённый сплошной линией путь вдоль края срезанной полоски. Но тогда после наложения полоски обратно на поверхность (слева внизу) сплошная кривая даст более короткий путь на поверхности, чем пунктирная, хотя та, по предположению, и была кратчайшим путем. Противоречие! Итак, мы доказали высказанное ранее утверждение:



[1.12] *Предположим, что нарисованный пунктирный путь является геодезической такой, что узкая (белая) полоска вокруг него не становится прямой линией при укладывании на стол. Но тогда мы можем укоротить пунктирный путь на плоскости (деформировав в направлении кратчайшего прямого пути на плоскости) и таким образом получить путь, изображённый сплошной линией. Если теперь наложить эту полоску на поверхность, то сплошной путь останется короче исходного пунктирного, а ведь мы предполагали, что то был кратчайший путь на поверхности, – противоречие*

> *Если вырезать на поверхности узкую полоску вокруг отрезка* G *геодезической и положить её на плоскость, то* G *станет отрезком* прямой линии. (1.6)

Мы уже очень близки к обещанному простому и практичному построению геодезических. Ещё раз взгляните на шаг 3 на рис. [1.11] – там, где мы вырезали полоску на поверхности. Представьте, что вместо этого мы *возвращаем* полоску на поверхность. Забудьте о том, как мы дошли до этого момента: что мы на самом деле делаем в процессе этого наложения? Мы взяли узкую прямую полоску (трёхмерной кожуры – но будем рассматривать математическую идеализацию: двумерную полоску) и раскатали её по поверхности в неглубокой канавке, из которой она была вырезана. А теперь ключевое наблюдение: канавка вообще не нужна – *поверхность* сама решает, как должна пролечь раскатываемая полоска!

Таким образом, обратив во времени процедуру (1.6), мы получаем замечательно простой и практичный метод[16] построения геодезических на физической поверхности:

> *Для построения на поверхности геодезической, исходящей из точки* p *в направлении* **v**, *закрепите один конец отрезка узкой липкой ленты в* p *и раскатайте её по поверхности в направлении* **v**. (1.7)

(Заметим, однако, что так *не* удастся построить геодезическую, соединяющую p с конкретной *конечной* точкой q.)

Если это построение кажется вам слишком простым, чтобы быть правдой, испытайте его на любой искривлённой поверхности, имеющейся под рукой. Можете убедиться, что липкая лента[17] действительно вычерчивает геодезическую, натянув вдоль поверхности нить между двумя точками: нить пройдёт по той же траектории, что и лента. Отметим, что мы получили обещанный бонус – новое построение с лентой работает на *любой* части поверхности, даже вогнутой, т. е. изгибающейся в сторону от вас, когда построение с натянутой нитью не годится.

---

[16] Как ни странно, этот важный факт трудно найти в литературе. (Пере)открыв его более 30 лет назад, мы начали поиски, и самым ранним упоминанием о базовой идее, которое смогли найти в то время, оказалась статья Александрова (Aleksandrov 1969, стр. 99), хотя там она была высказана в менее практичной форме: он представлял себе прижимание гибкой металлической линейки к поверхности. Впоследствии эта идея встречалась в работах Koenderink (1990), Casey (1996) и Henderson (1998). Однако позже мы узнали, что по существу она (хотя и не в нашей современной, практической форме) восходит к работам Леви-Чивита, т. е. ей уже больше ста лет! См. сноску на стр. 332.

[17] Мы рекомендуем малярный скотч, потому что он бывает ярких цветов, а вырезанную полоску можно многократно наклеивать и отклеивать. Самый простой способ получить узкие полоски (из обычно широкого рулона) – наклеить кусок ленты на кухонную разделочную доску, а затем острым ножом разрезать её вдоль на полоски настолько узкие, насколько вам нужно.