Содержание

Эта книга – восхитительный образец образовательного подхода, который опирается на математическое мышление как деятельность правого полушария мозга. Большинство разговоров про обучение по принципу «левое/правое полушарие» – это в лучшем случае грубая метафора; но Юджиния Ченг снабжает читателя (независимо от его «типа мозга») интеллектуальными инструментами, позволяющими использовать это различие в мышлении наиболее продуктивно. Книга ведет читателя небольшими шагами; но не заблуждайтесь – этот путь познания уходит очень далеко. Начиная не с чисел, а с повседневного опыта, автор постепенно дает нам понимание того, что считается очень продвинутой областью абстрактной математики – теории категорий (хотя Ченг на самом деле использует ее как аналог математического мышления в целом). Это не упрощенная математика; это высокое искусство мысли, которое заставляет читателя задуматься – порой глубоко. Мы, «левополушарные» люди, тоже можем многому научиться из этой книги.

Кейт Девлин, почетный профессор Стэнфордского университета,
автор книги «The Joy of Sets»

Юджиния Ченг искренне любит математику – не ту обычную математику, с которой сталкивается большинство людей, а самую абстрактную, которую она называет «математикой математики». И в этой прекрасной экскурсии по своему абстрактному миру теории категорий она стремится дать знания тем, кто готов присоединиться к ней и окинуть взглядом этот мир. Это путешествие изменит их взгляд на математику. Ченг – блестящий писатель, чья проза напоминает поэзию. Ее заразительный энтузиазм делает ее идеальным преподавателем.

Джон Юинг, президент Math for America

Особая заслуга Юджинии Ченг заключается в том, что она сделала абстрактную математику доступной для всех благодаря ее огромной изобретательности в поиске новых связей между логикой и жизнью. Эта книга представляет собой долгожданное, корректное, но мягкое введение в «математику математики», позволяющее каждому испытать радость от обретенного навыка категорийного мышления.

Эмили Рил, Университет Джонса Хопкинса,
автор книги «Category Theory in Context»

Считается, что Архимед однажды сказал: «Математика открывает свои тайны только тому, кто занимается ею с чистой любовью, ради ее собственной красоты». В этой увлекательной книге Юджиния Ченг с искренней любовью рассказывает про абстрактную теорию категорий, чтобы раскрыть ее красоту всем, кто хочет узнать больше о современной математике.

Марио Ливио, астрофизик, автор книг
«The Golden Ratio» и «Brilliant Blunders»

Эта книга Юджинии Ченг понравится чрезвычайно широкой и разнообразной аудитории: от нематематиков, которые хотели бы получить представление о том, что на самом деле представляет собой математика, до опытных математиков, которые не работают в области категорий, но хотели бы получить базовое понимание теории категорий. Будучи одним из последних, я испытал истинное удовольствие от чтения книги, не спотыкаясь на каждой странице и не ломая голову над деталями. Я уже многому научился из нее, в том числе пониманию знаменитой леммы Йонеды, и с нетерпением жду возможности узнать больше из нее в будущем.

Сэр Тимоти Гауэрс, Коллеж де Франс, лауреат премии Филдса,
главный редактор журнала *Princeton Companion to Mathematics*

Это незаменимая книга, которая делает теорию категорий настолько простой, насколько это вообще возможно. Ченг объясняет предмет ясно и дружелюбно, подробно, не опираясь на материал, который изучают только математики. Теория категорий – да и математика в целом – ждала появления такой книги.

Джон Баэз, Калифорнийский университет, Риверсайд

Многие люди насмешливо отзываются о теории категорий как о самой абстрактной области математики, но Юджинии Ченг удалось реабилитировать слово «абстрактный». Эта книга красноречива, открыта и привлекательна. Прочитав эту книгу, я убедился, что могу преподавать теорию категорий в качестве вводного курса, и это настоящее чудо, поскольку большинство людей оставляют этот предмет экспертам.

Фрэнсис Су, Колледж Харви Мадда, автор книги
«Mathematics for Human Flourishing»

Наконец появилась книга о теории категорий, которая не предполагает, что вы уже знаете теорию категорий! <…> Юджиния Ченг представляет нам эту тему с собственной точки зрения, с проницательностью и остроумием. Ее рассказ о том, как увидеть удивительную красоту абстракции, вдохновит и вас найти ее.

Патрик Хоннер, заслуженный учитель математики,
обозреватель журнала Quanta, автор книги «Painless Statistics»

Восторг абстрактной математики

Математик и автор нескольких научно-популярных книг Юджиния Ченг задалась целью показать читателям, что математика может быть гибкой, творческой и понятной. Это увлекательное путешествие через мир абстрактной математики к теории категорий прояснит тайны математического мышления и сформирует у вас собственный взгляд на математику без необходимости формального математического образования. Книга раскрывает понятия абстракции, используя примеры из повседневной жизни – от COVID-19 до маршрутов движения транспорта. Путешествие начинается с идей и упражнений в области абстрактной математики, после чего вы плавно перейдете к более прикладному материалу, изучая понятие категорий, а затем ключевые концепции теории категорий, такие как естественные преобразования, двойственность, и даже прикоснетесь к исследованиям в области теории высших категорий. Если вы уже знакомы с математикой, эта книга поможет вам глубже изучить фундаментальные понятия и укрепить знания.

Доктор Юджиния Ченг приобрела всемирную известность как исследователь теории категорий и популяризатор математики. Она написала несколько бестселлеров по математике, в том числе «How to Bake Pi» (2015), «The Art of Logic in an Illogical World» (2017), «Математический беспредел»[1] и две детские книги. Она также ведет колонку «Повседневная математика» в Wall Street Journal. Юджиния работает научным сотрудником в школе Чикагского института искусств, где преподает абстрактную математику студентам творческих специальностей. Она получила докторскую степень по теории категорий в Кембриджском университете и получила степень по чистой математике в Университете Шеффилда. Вы можете подписаться на нее: @DrEugeniaCheng.

---

[1] Оригинальное название: Beyond Infinity: An Expedition to the Outer Limits of Mathematics., Перевод: СПб.: Питер, 2019. – *Прим. перев.*

Пролог

Абстрактная математика доставляет мне огромное удовольствие. Конечно, математика проясняет сознание, расставляет вещи по своим местам и обладает большой «полезностью», но для меня не это главное. Меня вдохновляет *восторг*, который я испытываю, занимаясь математикой. Он побуждает меня продолжать работу, погружаться в науку все глубже и глубже и соблюдать дисциплину там, где без этого не обойтись.

Восторг от любимого дела – основа моей жизни. Я умею быть дисциплинированной: занимаюсь исследованиями, пишу книги, играю на фортепиано, готовлю еду по сложным рецептам. Но я твердо убеждена, что дисциплина нужна только для того, чтобы делать что-то неприятное. Я всегда стараюсь найти способ получать от своих дел удовольствие. Мой подход хорошо работает: удовольствие заводит меня гораздо дальше, чем это могла бы сделать дисциплина.

Абстрактная математика очень сильно отличается от привычной школьной математики. В школе нас учили работать с числами, уравнениями и решениями задач. В абстрактной математике этого нет. Школьная математика посвящена поиску правильного ответа. У абстрактной математики другие цели. К сожалению, школьная математика отталкивает многих людей своей рутиной. Абстрактная математика не нуждается в рутине.

Я написала эту книгу, чтобы познакомить читателей с миром абстрактной математики и отчасти изменить представления обычных людей о том, что такое математика, как она устроена и работает. Ключевой темой книги является теория категорий, но по ходу дела мы познакомимся с различными важными математическими объектами, включая разные типы чисел, форм, поверхностей и пространств, типы абстрактных структур, миры, которые они образуют, а также столкнемся с некоторыми вопросами, на которые пока не найден ответ.

В этом прологе я коротко расскажу о назначении, стиле и содержании книги и дам рекомендации для различных целевых аудиторий. Если вы заинтересованы в изучении продвинутой математики, которая сильно отличается от школьного курса, но традиционные учебники кажутся вам слишком сухими или требующими слишком серьезной подготовки, читайте дальше.

Имидж математики

У математики большая проблема с имиджем. Многие люди испытывают неприязнь к математике с начальной школы, и в конечном итоге, став взрослыми, они либо ненавидят ее, либо боятся, либо оправдывают себя полным отсутствием способностей и бесполезностью математических знаний в повседневной жизни. Я преподаю в Чикагском институте искусств и часто слышу от своих студентов-художников, что математика слишком строгая, нетворческая и трудная для запоминания; что вопросы математики не имеют ничего общего с реальной жизнью, а ответы на них включают слишком много правил и оттого скучны; что абстрактная математика нужна ученым и инженерам, но бесполезна для всех остальных.

С другой стороны, как абстрактный математик, я упиваюсь тем, насколько гибкой и творческой является эта область и как *мало* она требует запоминания. Меня воодушевляет и вдохновляет то, насколько хорошо абстрактный образ мышления применим ко всем аспектам жизни. Я обожаю абстракцию за то, что она не заставляет слепо следовать чьим-то правилам, а вместо этого позволяет создавать миры на основе разных правил и смотреть на них с разных ракурсов. И я считаю, что, хотя некоторые понятия абстрактной математики действительно нужны ученым и инженерам, мои любимые разделы познавательны и полезны для всех.

Я думаю, что в целом математическое образование важно по трем причинам.

1. Как основа для дальнейшего изучения математических дисциплин.
2. Для непосредственного применения в жизни.
3. Для выработки особого образа мышления.

Первый пункт – дальнейшее обучение, – очевидно, актуален не для всех: он не применим, если вы твердо решили, что не будете продолжать обучение в математическом (и, соответственно, научном) направлении.

Второй момент часто упоминают как причину обязательного изучения математики в школе, но, похоже, существует большое разнообразие мнений о том, что это на самом деле означает. По-моему, он никак не оправдывает бесконечное изучение треугольников, рисование графиков, решение квадратных уравнений, тригонометрических тождеств и т. д. Некоторые люди ограничиваются арифметикой и убеждены, что математика нужна для того, чтобы без помощи калькулятора сложить стоимость продуктов в корзине, подсчитать чаевые в ресторане или определить, сколько мы заплатим на распродаже со скидкой 20 %. Другие утверждают, что школьная математика недостаточно актуальна и детей следует учить таким вещам, как ипотека, процентные ставки и налоги. Я не поддерживаю в своих книгах такой приземленно-утилитарный взгляд на математику.

Третий пункт представляет математику как особый способ мышления, и именно его я придерживаюсь в своих исследованиях и преподавании. Абстрактная математика – это не просто предмет изучения. Это образ мышления, выявляющий глубинные связи между различными объектами и помогающий нам осмыслить общую картину. Он фокусирует наше внимание на том, что актуально для конкретной точки зрения, и временно игнорирует все остальное, чтобы мы могли добраться до сути вещей. Выявляя связи и находя глубинные структуры, мы ловко упаковываем неразрешимо сложные ситуации в компактные абстракции, что позволяет нам разбирать еще более сложные ситуации и эффективно использовать ограниченные возможности нашего мозга. Все начинается с чисел, где вместо того, чтобы все время повторять «1 + 1», мы можем назвать это 2 или собрать вместе несколько квадратов и назвать результат кубом, а затем построить более сложные математические конструкции, как будет показано дальше в этой книге.

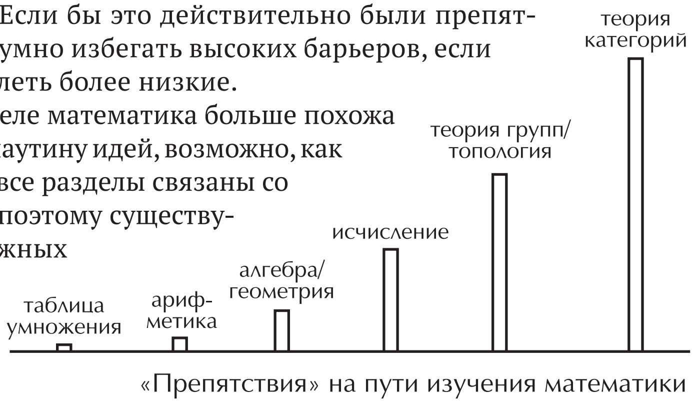
В этом, по моему мнению, и заключается сила и важность абстрактной математики. Идея о том, что она проливает свет на все аспекты нашей повседневной жизни, выглядит амбициозно, но она подкреплена широким спектром подобранных мной примеров, где отлично работает теория категорий, несмотря на то что эта область считается, пожалуй, «самой абстрактной» из всей математики. Сюда входят такие неожиданные вещи, как социальное неравенство и расизм. Это не надуманные «примеры» наподобие покупки 17 арбузов, а реальные вопросы, о которых мы действительно думаем (или должны думать) в нашей повседневной жизни.

Если люди отвергают математику, они отвергают и те способы мышления, которые могли бы их действительно увлечь и помочь. Печально, что им предлагают совершенно другой вид математики – алгоритмы, формулы, механическое запоминание и жесткие правила, а это совсем не то, чем занимается абстрактная математика. Математику понимают неправильно, и первого впечатления, которое многие люди получают от нее, достаточно, чтобы навсегда погасить интерес к знаниям, из которых можно извлечь немалую пользу и удовольствие, если рассматривать их в правильном свете.

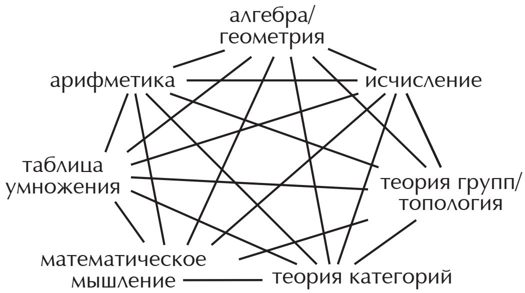
Предметы традиционной математики

Типичное математическое образование похоже на серию препятствий с нарастающей высотой. Если бы это действительно были препятствия, то было бы разумно избегать высоких барьеров, если вы не можете преодолеть более низкие.

Однако на самом деле математика больше похожа на взаимосвязанную паутину идей, возможно, как на следующей схеме; все разделы связаны со всеми остальными, и поэтому существует множество возможных маршрутов на пути познания в зависимости от того, как устроен ваш мозг.



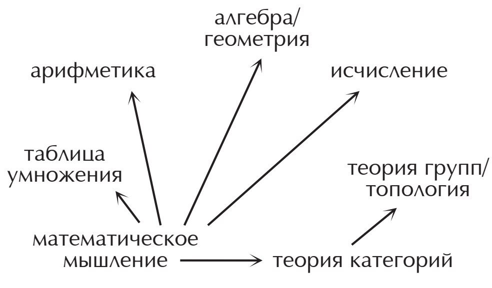
«Препятствия» на пути изучения математики



«Взаимосвязи» в обучении математике

Некоторым людям необходимо постепенно, посредством конкретных примеров приближаться к абстрактным идеям. Но не все мыслят одинаково. Есть люди, для которых конкретные примеры не имеют смысла, пока они не уловят абстрактные идеи, или, что еще хуже, конкретные примеры настолько их отталкивают, что они сдаются, если не оставить им выбора. Когда я впервые попробовала односолодовые сорта виски, то была разочарована, но позже выяснилось, что более искушенные друзья пытались познакомить меня с виски через сорта, которые они считали «хорошими для новичков». Оказывается, мне изначально нравятся только очень дымные односолодовые виски Islay, а не более сладкие и насыщенные сорта, склонности к которым ожидают от новичков.

Нечто подобное получилось и с математикой. Мой путь познания в математике напоминает следующую схему.



Мой переход к математике более высокого уровня не требовал знания математических предметов, которые мне преподавали ранее. Фактически после изучения теории категорий я вернулась к другим разделам и поняла их намного лучше.

За несколько лет преподавания абстрактной математики студентам-художникам я убедилась, что я не единственная, кто предпочитает использовать абстрактные идеи для изучения конкретных примеров, а не наоборот. Многие из моих студентов считают, что им не дано усвоить математику, потому что они плохо запоминают таблицу умножения, медленно считают в уме и застревают на решении уравнений. Но это не значит, что они плохи в математике, – это просто означает, что они не очень хороши в таблицах умножения, вычислениях в уме и уравнениях – абсолютно крошечной части математики, которую вообще вряд ли можно считать абстрактной. Сюрприз – эти же студенты не испытывают затруднений, когда мы добираемся до абстрактных идей, таких как многомерные пространства, тонкие понятия эквивалентности и структуры теории категорий. Затруднения с вычислениями в уме никак им не мешают.

Мне кажется, что мы необоснованно отказываем студентам в доступе к абстрактной математике, заставляя их превозмогать неабстрактную математику, и что этот подход контрпродуктивен. На самом деле многие студенты способны самостоятельно выбрать для изучения абстрактную математику, если им не нравится «обычная». Представьте, что мы не позволяем людям пробовать плавать, потому что они бегают медленно, или не разрешаем им петь, пока они не научатся хорошо играть на фортепиано.

Одна из целей этой книги – представить абстрактную математику напрямую, таким образом, чтобы это не зависело от владения другими разделами математики. Не имеет значения, если вы не преодолели какие-то традиционные барьеры. Вернетесь к ним позже, если захотите.

Методы традиционной математики

Когда я изучала современные языки в школе, на разных экзаменах проверялись четыре аспекта: чтение, письмо, говорение и аудирование. Из них письмо и устная речь демонстрируют навыки *воспроизведения*, тогда как чтение и слушание относятся к навыкам *восприятия*. Для полного овладения языком, конечно, необходимы все четыре навыка, но, если полное свободное владение языком вам не по силам, все равно полезно уметь хоть что-то. Позже я изучала немецкий язык, чтобы понять сонаты Шуберта (а также Брамса, Штрауса, Шумана и т. д.). У меня почти отсутствует навык воспроизведения немецкого языка, но я понимаю романтическую немецкую поэзию на должном уровне, включая нюансы, и это отлично помогает мне в жизни как пианисту-аккомпаниатору[1].

Я думаю, что по аналогии с языками, в математике тоже существуют понятия воспроизведения и восприятия. *Математическое воспроизведение* – это способность отвечать на вопросы, скажем на вопросы домашнего задания или вопросы экзамена, а затем проводить оригинальные исследования. Существует довольно широко распространенное мнение, что единственный способ понять математику – это решать задачи. Существует также мнение, что это единственный стоящий способ заниматься математикой. Я хотела бы это опровергнуть.

Я считаю, что *математическое восприятие* предполагает понимание математики, даже если вы не можете решить незнакомые задачи. Это способность следить за аргументами, даже если вы не можете вывести их самостоятельно.

Я могу оценить немецкую поэзию, ресторанную еду, скрипичный концерт, картины Караваджо, теннисный матч. Теперь представьте, что восприятию

---

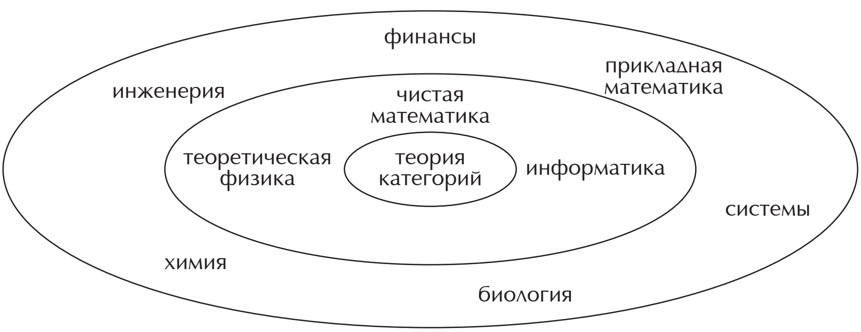
[1] Юджиния Ченг – не только признанный математик, но и профессиональная пианистка, регулярно выступающая с концертами. – *Прим. перев.*

всего этого можно было бы научиться только на личной практике. Я даже могу прочитать и понять медицинскую исследовательскую статью, хотя не могу лечить больных. Здесь работает способность к восприятию. В математике некоторые авторы с презрением называют это «математическим туризмом». Но я думаю, что с туризмом как раз все в порядке: очень обидно, если у вас на выбор только два варианта – переехать куда-то навсегда или остаться дома. И, кстати, это не шутка. Однажды я разговаривала с представителем медицинской страховой компании, который был уверен, что я не могу временно поехать в другой штат и запросить страховое покрытие оттуда.

Эта книга отличается тем, что я не буду требовать от читателя выполнения каких-либо упражнений. В книгах по математике принято заставлять читателя выполнять упражнения, но я считаю, что это отталкивает многих нематематиков, а также некоторых математиков (включая меня). Время от времени я буду говорить о «поводах для размышления», выделяя их в тексте, но это именно поводы для размышлений, а не задачи, которые нужно решить. И одной из главных целей этих размышлений будет развитие интуитивного чутья вопросов, которыми задаются математики. Я надеюсь, что по мере нашего продвижения эти вопросы начнут возникать у вас спонтанно, еще до того, как я сформулирую их явно. Обдумывание интуитивно возникающих вопросов – один из важных аспектов математического мышления. Там, где их детальная проработка полезна для дальнейшего понимания материала, я приведу свои пояснения.

О чем эта книга

Теория категорий была предложена Эйленбергом и Маклейном в 1940-х гг. и с тех пор получила более или менее повсеместное распространение в чистой математике. В одних областях это уровень языка, в других – основа, в третьих – инструмент, базис, или то, от чего зависит вся структура. Кроме того, теория категорий быстро нашла применение за пределами чистой математики, в теоретической физике и информатике. Положение дел в конце XX века можно представить с помощью следующей диаграммы, где показаны приложения, выходящие за рамки теории категорий:



Однако с тех пор теория категорий становилась все более распространенной, находя прямое применение в гораздо более широком круге предметов, помимо чистой математики, таких как экологическое разнообразие, химия, управление системами, инженерия, управление воздушным движением, лингвистика, социальная справедливость. Теперь картину можно представить примерно так:

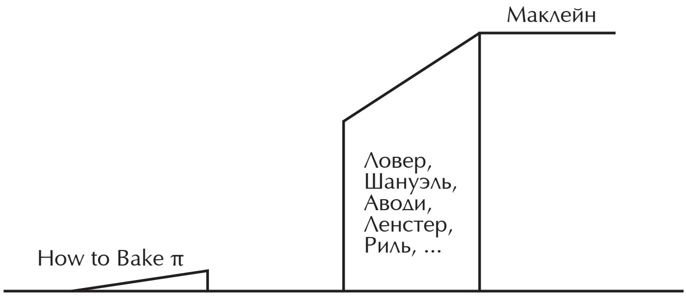
В течение некоторого времени единственным учебником по этому предмету был классический учебник Маклейна «Categories for the Working Mathematician» (1971). Дело в том, что Маклейн совершил настолько большой скачок, что многим было не по силам его хотя бы повторить.

Как это обычно случается, предмет академических исследований постепенно стал предметом интереса аспирантов, и в конечном итоге на его основе возникли несколько курсов бакалавриата в отдельных университетах по всему миру – там, где нашлись знатоки, желающие преподавать теорию категорий на должном уровне. Благодаря им на рубеже XXI века появилось несколько намного более доступных учебников. В частности, это учебники Ловера и Шануэля (1997), за которыми последовала своего рода вторая волна с учебниками Аводи (2006), Ленстера (2014) и Риля (2016). Но даже эти книги заставляли читателя самостоятельно преодолеть разрыв, который все еще оставался непреодолимым для многих людей, не имевших диплома бакалавриата по математике, ни с точки зрения формального математического опыта, ни с точки зрения используемых примеров[1].

В 2015 г. я написала книгу о теории категорий «How to Bake Pi», адресованную максимально широкой аудитории без какого-либо математического образования. Ситуация стала такой:

---

[1] Ловере и Шануэль включают в заявленную целевую аудиторию учеников старших классов, но, думаю, они имеют в виду очень продвинутых старшеклассников. Есть также несколько книг, предназначенных для ограниченной аудитории, которые в меньшей степени похожи на стандартные учебники; они упомянуты в разделе «Дополнительное чтение».



Книга «How to Bake Pi» обеспечивает переход от полного незнания предмета до какого-то начального уровня, но не слишком углубляется в тему и придерживается в основном неформального стиля. Роль книги, которую вы читаете сейчас, заключается в заполнении оставшегося пробела:

Эта книга не предполагает математической подготовки на уровне бакалавриата или даже намерения ее получить. Перед ней стоит цель ликвидировать некомфортный разрыв между школьным курсом математики и учебниками для студентов. Мы будем очень постепенно приближаться к строгой формальности теории категорий. Хотя для изучения теории категорий не существует особых требований, формальность любой математической области может оттолкнуть тех, кто к ней не привык. Цель состоит в том, чтобы вы могли читать эту книгу *и перелистывать страницы*, в отличие от многих книг по математике, где вам приходится сидеть и думать час, неделю или месяц об одном абзаце (хотя и такие книги тоже нужны). Она написана в неформальном и открытом стиле, включая излияния моих личных чувств по поводу различных аспектов предмета. Это не совсем часть математики, но я считаю, что наличие эмоциональной вовлеченности – важная часть обучения чему-либо. В книге будет много иллюстраций отчасти для привлечения людей, склонных к визуальному восприятию, а отчасти потому, что предмет очень нагляден. Вы встретите как формальные математические диаграммы, так и неформальные схемы. Все это означает, что книга будет в каком-то смысле противоположностью краткости – возможно, слишком длинной из-за разнообразных пояснений и отступлений. Но я считаю, что это ключ к охвату широкой аудитории, не склонной (или еще не подготовленной) к чтению краткой математической литературы.

Для кого эта книга

Я адресую эту книгу всем, кто хочет углубиться в современную математику, которой не занимаются в школе и которая сильно отличается от той математики, что изучают в школе. Чтение этой книги не зависит от ваших предыдущих достижений по математике и ваших будущих математических целей. Я не претендую на какие-либо знания или воспоминания о школьной математике и буду постепенно повышать уровень формальности на тот случай, если вас раньше отталкивали символы и обозначения. Я обращаюсь к нескольким разным типам читателей:

- взрослые, которые сожалеют, что в прошлом им не преподавали увлекательную математику, и в глубине души надеются, что они смогут понять математику, если ее преподнести по-другому;
- взрослые, которые всегда любили математику, скучают по ней и хотят испытать положительные эмоции от изучения математики;
- все, кто желает изучить современную математику, не включенную в стандартную учебную программу, хотя я надеюсь, что когда-нибудь это произойдет;
- учителя математики, которые хотят расширить свои знания и/или получить идеи о том, как преподавать абстрактную математику без специальной предварительной подготовки;
- школьники, которым нужны дополнительные занятия по математике, чтобы расширить свои знания, и/или введение в математику более высокого уровня, отличное от того, с чем они обычно сталкиваются в школе;
- школьники, которые недовольны уроками математики и хотят получать более глубокие и менее рутинные знания;
- обычные люди разных профессий, которые хотят изучать теорию категорий, но считают, что существующие учебники им недоступны. Судя по переписке с читателями книги «How to Bake Pi», в их число входят программисты, инженеры, бизнесмены, психологи, лингвисты, писатели, художники и многие другие;
- студенты-математики, которые слышали о важности теории категорий, но не уверены, почему такая абстракция необходима, или не знают, с чего начать;
- обладатели математического образования, желающие иметь вспомогательную книгу, которая понятно излагает теорию категорий наряду с техническими деталями;
- домашние школы и образовательные летние лагеря.

Читателям не обязательно начинать с книги «How to Bake Pi», хотя она, скорее всего, послужит полезной основой для дальнейшего чтения.

Эта книга выросла из курса, который я читала студентам-искусствоведам в Чикагском институте искусств. У большинства учеников был неудачный опыт школьной математики, и многие из них либо не смогли ничего оттуда запомнить, либо намеренно забыли все, поскольку считали свой опыт очень травмирующим. Я постаралась добиться максимального отличия от школьного курса. Если говорить о количестве страниц, книга может показаться длинной, но я надеюсь, вы быстро обнаружите, что можете просматривать страницы гораздо быстрее, чем в обычном учебнике математики. Если содержание этой книги изложить в форме стандартного учебника, оно займет около 100 страниц. Я не хотела сокращать книгу ценой отказа от объяснений, поэтому предпочла более длинную книгу с более подробными объяснениями. Я буду постепенно вводить формальный математический язык, а в конце книги вы найдете глоссарий для быстрого ознакомления с терминами. В нем есть упоминания связанных понятий, выходящих за рамки этой книги, но не потому, что вам нужно их знать, а просто для удобства, если вы заинтересуетесь и захотите их найти.

Одна из главных проблем, с которой сталкиваются читатели учебников по теории категорий, заключается в том, что примеры в них часто взяты из других разделов чистой математики. В этой книге я использую примеры из повседневного опыта, такие как семейные отношения, поездки на поезде, замораживание и размораживание продуктов питания, а также острые социальные темы. Я обнаружила, что это помогает студентам общаться с абстрактной математикой более свободно, на уровне интуитивного понимания, чего обычно лишены стандартные примеры. Иногда я включаю в главу математическое примеры, но в таком случае либо подробно объясняю связанные понятия, либо отмечаю, что пример не является обязательным и адресован студентам, которые уже знакомы с темой.

В частности, если вы думаете, что плохо справляетесь с вычислениями в уме, не разбираетесь в алгебре, не умеете решать уравнения и содрогаетесь при мысли о рисовании графиков, это не помешает вам читать книгу. Я не говорю, что книга покажется вам легкой: абстракция – это способ мышления, требующий определенных навыков. Первая часть книги послужит своего рода разминкой, а со второй части мы примемся за дело всерьез. Вы должны приложить интеллектуальные усилия, иначе мы ничего не добьемся. Но скромный опыт в математике не должен преграждать вам путь к математической абстракции, как могло показаться раньше. Даже больше, чем формальное описание теории категорий, я хочу передать радость, которую испытываю от этого предмета: изучая его, исследуя, применяя, думая о нем. Я хочу поделиться не только техническими деталями или огромным количеством теорем, но и восторгом от абстрактной математики.

ЧАСТЬ I

ЧТО ТАКОЕ КАТЕГОРИИ

1

Начнем с идей

Неформальный обзор самой сути теории категорий.

Мне нравится называть теорию категорий «математикой математики».

Я признаю, что эта фраза звучит несколько самоуверенно, но она сопряжена еще с одной проблемой – широко распространенным заблуждением о том, чем на самом деле является математика. Здесь эта проблема умножается (или, возможно, возводится в степень бесконечности), потому что математика ссылается на саму себя.

Другое распространенное заблуждение заключается в том, что, прежде чем вы сможете понять теорию категорий, вам нужно понять всю остальную математику. Действительно, эта точка зрения преобладала в прошлом: прежде чем приступить к изучению теории категорий, вы должны были понимать если не всю математику, то по крайней мере ее большую часть, скажем, на уровне аспиранта. Вот почему теория категорий традиционно преподается только в аспирантуре, а в последнее время иногда и на старших курсах математических факультетов университета для студентов, которые уже имеют солидный опыт в области чистой математики. Общепринятое мнение состоит в том, что все поясняющие примеры должны быть взяты из других разделов чистой математики, поэтому вам необходимо сначала понять их, прежде чем пытаться понять теорию категорий.

Ставить под сомнение «общепринятую мудрость» – одно из моих любимых занятий. Я не призываю слепо идти против опыта, но проблема общепринятой мудрости, как и «здравого смысла», заключается в том, что их слишком часто не подвергают сомнению.

Мой опыт изучения и преподавания теории категорий отличается от общепринятого. Впервые я изучила теорию категорий традиционным способом, то есть после многих курсов бакалавриата по чистой математике. Однако эти курсы не помогли мне понять теорию категорий, скорее наоборот: теория категорий была для меня гораздо более увлекательной, чем остальное, и я любила и понимала ее саму по себе, после чего она помогла мне понять те разделы чистой математики, которые я раньше не понимала.

В конце концов я решила преподавать теорию категорий студентам, практически не имеющим опыта в области чистой математики. Я убеждена, что идеи интересны сами по себе и что примеры, иллюстрирующие эти идеи, можно найти в жизни, а не только в чистой математике. Вот почему я начинаю книгу с главы, посвященной этим идеям.

Я думаю, что иногда мы можем непреднамеренно попасть в образовательную ловушку, полагая, что нам нужно изучать и преподавать математику в том порядке, в котором она развивалась исторически, потому что, несомненно, это логический порядок развития идей. Этот подход часто описывают фразой «онтогенез повторяет филогенез»[1], хотя на самом деле речь идет о биологическом развитии, а не об обучении. Я думаю, что в некоторых случаях это имеет смысл. Путь, которым дети приходят к пониманию чисел, вероятно, повторяет историю развития чисел, начиная со счетных чисел 1, 2, 3, ..., потом появляется ноль, далее возникает понимание отрицательных чисел и дробей (возможно, в обратном порядке) и в конечном итоге иррациональных чисел. Однако некоторые разделы математики возникли из-за отсутствия технологий и теперь являются несколько излишними. Больше не важно уметь пользоваться логарифмической линейкой. Я знаю очень мало конструкций линеек и циркуля, но это не помешало мне заниматься теорией категорий, точно так же как мои плохие навыки верховой езды не мешают мне водить машину. Конечно, верховая езда может приносить удовольствие и даже иметь решающее значение в некоторых конкретных ситуациях, точно так же как встречаются ситуации, в которых могут пригодиться навыки вычисления в уме и деления столбиком. Некоторым людям просто нравится перемножать большие числа. Однако ни одна из этих ситуаций не является на самом деле предпосылкой для знакомства с теорией категорий и извлечения из нее выгоды.

Тем не менее я считаю, что мы можем извлечь пользу из идей и методов теории категорий даже за пределами математических исследований и прямого применения в инженерии. Математика – это, помимо прочего, область исследования, язык и набор инструментов для решения конкретных задач. Но это также образ мышления. Теория категорий – это способ мышления о математике, следовательно, это *способ мышления о мышлении*. Размышления о том, как мы думаем, немного походят на созерцание пупка, но я считаю, что это хороший способ научиться думать лучше. Я думаю, что в мире фейковых новостей, запоминающихся, но бессодержательных мемов и хаотичного переключения внимания очень важно находить способы эффективно использовать свой мозг и делиться ими как можно шире, а не поддерживать в людях ошибочное убеждение, что сначала им нужно освоить все разделы чистой математики.

Постепенно я осознала, что использую идеи и принципы теории категорий во всех своих размышлениях о мире, выходящих далеко за рамки моих

---

1 Эта фраза принадлежит Эрнсту Геккелю, у которого были отвратительные взгляды на расовую чистоту и евгенику, поэтому мне неприятно его цитировать, но технически следует отдать ему должное за формулировку.

исследований, и в областях, которые, вероятно, официально не считаются математикой. Именно эти идеи и принципы я хочу описать в первой главе, прежде чем перейти непосредственно к теории категорий. Эта глава представляет собой в некотором смысле неформальный обзор всей книги; сначала вам может не хватать понимания картины, но я надеюсь, что по мере чтения идеи станут яснее.

Мы будем приближаться к определениям очень постепенно, поэтому, если вы сгораете от нетерпения, можете забежать вперед и просмотреть главу 8, но я настоятельно рекомендую вам прочитать вступительные главы, чтобы освоить новый стиль мышления. В эпилоге я вернусь к идеям и духу теории категорий, но с более технической точки зрения, после того как мы изучим математический формализм.

1.1. Абстракция и аналогии

Математика в значительной степени полагается на абстракцию. Все ее аргументы основаны на строгой логике, а строгая логика работает правильно только в абстрактных условиях. Мы можем попытаться использовать строгую логику в менее абстрактных условиях, но почти наверняка[1] столкнемся с проблемами какой-либо неоднозначности: определений, интерпретаций, поведения и т. д.

В обычной жизни всегда существует вероятность того, что что-то помешает идеальной работе логики. Мы могли бы думать, что логически один плюс один всегда равно двум, но в реальной жизни в логику могут вмешаться некоторые аспекты рассматриваемых объектов. Если кто-то дает вам одно печенье, а затем другое, у вас может быть два печенья, но это зависит от того, съели ли вы их. Если бы у вас был один цветок и вы купили другой, то у вас их может быть два, но, возможно, вы купили еще один, потому что первый засох.

Абстракция – это процесс принятия решения о том, какие детали следует игнорировать, чтобы обеспечить идеальную работу нашей логики. В приведенных выше ситуациях абстракция может заключаться в указании, что мы не едим печенье или что цветы не умирают (или не размножаются). Это важная часть процесса занятий математикой, поскольку одна из целей – устранить неоднозначность наших аргументов. Это не означает, что неоднозначность плоха; в самом деле, неоднозначность – это одна из вещей, которые делают человеческую жизнь насыщенной и красивой. Однако она также может сделать аргументы бесполезными. Математика – это мир, в котором одна из ключевых целей – сделать аргументы однозначными, чтобы прийти к согласию в чем-то. В следующей главе я подробно расскажу о том, как работает абстракция, каковы ее преимущества и недостатки. Идея со-

[1] Очень хочется сказать «всегда», но мой точный математический мозг не позволяет мне высказывать утверждения без оговорок, таких как «вероятно», «я считаю» или «это почти наверняка верно».

стоит в том, что абстракция сама по себе потенциально может быть неоднозначной, а теория категорий обеспечивает надежную основу для реализации абстракций.

1.2. Связи и унификация

Одна из целей и сильных сторон абстракции – установление *связи* между различными объектами, которые раньше выглядели очень разными. Может показаться, что абстракция уводит нас дальше от «реальных» объектов. На первый взгляд это так, но в то же время абстракция позволяет нам устанавливать связи между объектами, которые находятся дальше друг от друга. Это один из способов, с помощью которого математика помогает нам лучше понять суть вещей, создавая связи между различными объектами или ситуациями, чтобы мы могли изучать их все сразу, вместо того чтобы выполнять работу снова и снова. Как только мы поймем, что один плюс один – два (абстрактно), нам больше не придется задавать себе этот вопрос для разных объектов. Обнаружение сходства в наших мыслительных процессах позволяет нам более эффективно использовать возможности мозга.

Один из способов, которым это достигается, – это обнаружение *паттернов* (закономерностей). Паттерн может возникнуть как связь внутри одной ситуации, например когда мы используем повторяющийся узор для облицовки пола или стены плиткой. Или он может возникнуть как связь между различными ситуациями, например когда мы видим, что люди определенного типа из раза в раз ведут себя агрессивно по отношению к другим, будь то на работе или в личном общении, в реальной жизни или в интернете.

Установление связей между различными ситуациями является шагом в направлении *унификации*. В математике это означает не сделать все одинаковым, а создать абстрактную теорию, которая может охватить и пролить свет на множество разных вещей. Теория категорий – это объединяющая теория, которая, как мы увидим, может одновременно охватывать широкий спектр тем, а также широкий диапазон масштабов за счет увеличения и уменьшения детализации. Глава 3 будет посвящена паттернам и тому, как они позволяют распознавать абстрактные структуры.

1.3. Контекст

Одной из отправных точек теории категорий является идея о том, что мы всегда должны изучать вещи в контексте, а не изолированно. Это немного похоже на то, как всегда сначала устанавливают систему отсчета. Это один из важнейших способов устранить неоднозначность с самого начала, поскольку в разных контекстах вещи могут приобретать совершенно разные значения и разные характеристики. Наш пример «один плюс один», дающий разные результаты, на самом деле был случаем, когда контекст мешал логическому выводу. Один плюс один всегда равняется двум, если мы находимся в контексте вещей, ведущих себя как обычные числа, а не как какой-то другой вид чисел. Но существует множество контекстов, в которых вещи ведут себя по-разному, как мы увидим в главе 4. Один из ключевых принципов теории категорий – убедиться, что мы всегда осознаем и конкретизируем, какой контекст мы рассматриваем. Это актуально и во всех аспектах жизни. Например, контекст чьей-то жизненной ситуации, его биография имеет большое влияние на то, как этот человек ведет себя и что представляют собой его достижения. Одинаковые достижения намного больше впечатляют людей в том случае, если кому-то пришлось бороться с нищетой в детстве, тяжелой болезнью или социальными препонами. Иногда это противоречиво называют «позитивной дискриминацией», но я предпочитаю называть это *контекстной оценкой*.

1.4. Отношения

Одним из важнейших способов, с помощью которых теория категорий выделяет и определяет контекст, являются *отношения*. Теория говорит о том, что в данном контексте важно то, как вещи связаны друг с другом, а не их внутренние характеристики. Типы отношений, которые мы рассматриваем, часто являются ключом к определению того, в каком контексте мы находимся или должны находиться. Например, в некоторых контекстах важно, на сколько лет один человек старше другого, но в других контекстах важно, каковы их семейные отношения или сколько они зарабатывают. Но если мы рассуждаем, допустим, о том, насколько хорошо разные люди будут управлять страной, то вряд ли важно, сколько денег они имеют по отношению друг к другу в настоящий момент.

В математике одни и те же объекты могут быть связаны разными типами отношений, поэтому важно уметь сосредоточиться только на определенных типах. Это не значит, что остальные бесполезны, это просто означает, что, по нашему мнению, они не применимы к данной ситуации. Или, возможно, мы хотим провести что-то вроде контролируемого эксперимента. Сами числа имеют различные типы отношений друг с другом. Самое очевидное отношение между числами связано с их величиной, поэтому мы располагаем числа на прямой в порядке их размера. Но мы могли бы разместить числа на другой диаграмме, указав, какие числа делятся на другие. В теории категорий это два разных способа разместить структуру категорий на одном и том же множестве чисел, используя разные типы отношений. Подробнее об этом мы поговорим в главе 5.

Отношения, применяемые в теории категорий, по сути, могут быть любыми, если они удовлетворяют некоторым базовым принципам, гарантирующим, что их можно организовать в достаточно удобном виде. Это приведет нас к формальному определению категории. В дополнение к этому в главе 6 мы рассмотрим идею формализма, чтобы облегчить понимание этого аспекта математики, который иногда может быть весьма неприятным. В главе 7 мы рассмотрим особый тип отношений, называемый отношением эквивалентности. Он обладает многими хорошими свойствами, что делает его чрезвычайно удобным. Фактически отношения эквивалентности обладают слишком многими хорошими свойствами, поэтому они слишком ограничительны, чтобы их можно было выразить в широком смысле, как того требует теория категорий.

Вы увидите, что теория категорий – это основа, которая обеспечивает замечательный компромисс между хорошим поведением и возможностями самовыражения. Если рассматриваемая система требует слишком хорошего поведения, то выразительность ограничена, как в тоталитарном государстве с очень строгими законами. С другой стороны, если требований слишком мало, то существует большой потенциал для выразительности, а также для хаоса и анархии. Теория категорий достигает продуктивного баланса между ними, определяя, какой тип отношений она собирается изучать.

Первая часть книги посвящена формальному определению категории. За ней последует интерлюдия, которая будет экскурсией по математике, представляя различные математические структуры в качестве примеров категорий. Обычно в учебниках по теории категорий полагают, что читатель уже знаком с этими примерами и легко усвоит определение категорий. Я поступлю иначе – представлю эти примеры с нуля, взяв вместо этого идеи теории категорий в качестве отправной точки для ознакомления со связанными математическими темами. Во второй части книги более детально говорится о том, что мы делаем с теорией категорий.

1.5. Сходство

Один из основных принципов и целей теории категорий – найти более тонкие способы описания сходства. *Сходство* – ключевое понятие в математике, и на базовом уровне оно возникает как равенство вместе с понятием уравнений. Действительно, у многих людей создается впечатление, что математика – это *только* числа и уравнения. Это очень далеко от истины, особенно для теоретика категорий. Прежде всего, хотя числа являются примером объектов, которые можно организовать в категорию, весь смысл в том, чтобы иметь возможность изучать гораздо более широкий круг вещей, чем числа. Во-вторых, теория категорий конкретно не занимается уравнениями, потому что равенство – слишком сильное понятие сходства в теории категорий.

Дело в том, что многие вещи, которые мы пишем со знаком равенства в базовой математике, на самом деле не всегда равны. Например, когда мы пишем $5 + 1 = 1 + 5$, мы на самом деле имеем в виду одинаковый результат сложения, а не то, что две стороны уравнения на самом деле полностью одинаковы. Действительно, если бы обе стороны были совершенно одинаковыми, не было бы смысла записывать уравнение. Вся суть в том, что есть смысл, в котором две стороны уравнения различны, и смысл, в котором эти две стороны одинаковы, и мы используем смысл, в котором они одинаковы, чтобы отвлечься от смысла, в котором они разные, продвинуться дальше и выстроить более сложный мыслительный процесс. Мы поговорим об этом в главе 14.

Числа и уравнения постоянно сопровождают друг друга, потому что числа – это довольно простые сущности[1], и равенство является для них подходящим понятием «одинаковости». Но стоит нам взяться за идеи, более сложные, чем числа, как возникают гораздо более тонкие понятия сходства. Существует совершенно противоположная крайность: когда мы говорим о людях, то понятие сходства или равенства становится довольно сложным. Когда мы говорим о сходстве людей, мы не имеем в виду, что любые два человека на самом деле являются одним и тем же человеком (что не имело бы смысла), но мы имеем в виду нечто более тонкое в отношении того, как их следует воспринимать или как к ним следует относиться. Вокруг темы сходства и категоризации людей вообще постоянно разгораются споры, поскольку существует очень много возможных интерпретаций.

Математика – это попытка сгладить неоднозначность и привести более разумные аргументы. Теория категорий стремится изучить понятия сходства, которые являются более тонкими и сложными, чем прямое равенство, но при этом достаточно однозначными, чтобы их можно было обсуждать с помощью строгих логических аргументов. Иногда намного более удачный вопрос состоит не в том, одинаковые ли два объекта, а в том, в чем они сходны, а в чем нет, и, более того, если рассматривать различия, то насколько и в чем они различаются? Этот уровень тонкого различения, обеспечиваемый теорией категорий, крайне необходим и в обычной жизни.

1.6. Характеризация объектов по их роли в контексте

Теория категорий стремится охарактеризовать объекты по той роли, которую они играют в контексте, а не по каким-то внутренним характеристикам. Это связано с идеей, что наиболее важны контекст и отношения. Как только мы поймем, что объекты приобретают очень разные характеристики в разных контекстах, станет яснее, что сама идея внутренних характеристик довольно шаткая.

Я думаю, это относится и к людям. Я не думаю, что у меня есть четко определенная внутренняя личность, потому что я веду себя по-разному в зависимости от того, в какой ситуации я нахожусь. В некоторых ситуациях я уверена в себе и разговорчива, а в других ситуациях испугана и застенчива. Даже математические объекты ведут себя похожим образом, хотя в этом случае характеристики, о которых мы говорим, – это не черты личности, а математическое поведение.

[1] На самом деле это очень глубокие сущности, но, как только они определены, в них не так много нюансов.

Например, мы могли бы сказать, что число 5 является простым, «потому что оно делится только на 1 и на само себя», но нам следует указать, что контекст, который мы подразумеваем, – это целые числа, потому что если мы допустим дроби, тогда 5 делится на все вещественные числа (кроме 0)[1].

В обычной жизни мы часто путаем, когда характеризуем вещи по ролям и свойствам, как это принято в разговорном языке. Например, «тыквенная приправа» названа в честь роли, которую эта комбинация специй играет в классическом американском тыквенном пироге, хотя теперь ее используют как самостоятельную приправу во многих блюдах, которые на самом деле не являются тыквенным пирогом. Но ее по-прежнему называют тыквенной приправой, что сбивает с толку неамериканцев. И наоборот, фунт-кейк (фунтовый торт) получил такое название, потому что его рецепт содержит по фунту каждого из основных ингредиентов. Следовательно, он назван в честь внутреннего свойства (равного соотношения ингредиентов) и по-прежнему будет называться фунт-кейком, даже если вы измените вес ингредиентов. Лично я никогда не делала такого огромного торта.

Одним из преимуществ характеристики объектов по роли, которую они играют в контексте, является то, что вы можете затем проводить сравнения в разных контекстах, находя объекты, которые играют аналогичную роль в других контекстах. Мы поговорим об этом, когда будем обсуждать универсальные свойства в главе 16. Это может звучать как противоположность тому, что я только что описала, поскольку это немного похоже на свойства, которые являются универсальными независимо от контекста, но на самом деле это относится к свойству быть каким-то выдающимся или каноническим в контексте. Роль не только говорит нам об объекте с данным свойством, но также может кое-что рассказать и о самом контексте. Если мы сравним самых высокооплачиваемых и самых низкооплачиваемых сотрудников в разных компаниях, то сможем сделать выводы об этих компаниях, а не только о сотрудниках. Это всего лишь один фрагмент информации (в отличие от всего распределения зарплат по компании), но он все равно имеет для нас значение.

1.7. Увеличение и уменьшение детализации

Одним из мощных аспектов уровня абстракции теории категорий является то, что он позволяет нам увеличивать и уменьшать детализацию и рассматривать крупные и мелкие математические структуры в одинаковом свете. Это похоже на теорию, объединяющую субатомный уровень с уровнем галактик. Это один из моих любимых аспектов теории категорий. Если мы изучаем птиц, нам, возможно, потребуется разработать теорию птиц, чтобы сделать наше исследование более строгим. Однако эта теория птиц сама по себе не является птицей – она на один уровень абстракции выше. А если мы изучаем математические объекты, нам точно так же может понадобиться теория этих

1 Кроме того, это скорее характеристика, чем определение.

объектов. Я нахожу чрезвычайно привлекательным то, что теория категорий сама по себе также является математическим объектом, который мы можем изучать, используя ту же теорию. Теория категорий – это математическая теория, но сама по себе она является частью математики, поэтому ее можно использовать для изучения самой себя. Это звучит как замкнутый круг, но на самом деле, хотя мы все еще находимся в теории категорий, мы оказываемся в несколько *более высоком измерении* теории категорий. Измерения в данном случае относятся к уровням взаимоотношений. В базовой теории категорий наше понимание начинается с утверждения, что мы должны изучать отношения между объектами, а не только сами объекты. Но как насчет отношений? Если мы считаем, что это новые математические объекты, не следует ли нам также изучить отношения между ними? Это дает нам еще одно измерение.

Но почему мы должны на этом останавливаться? А как насчет отношений между отношениями между отношениями? Это дает нам третье измерение. И на самом деле не существует логически определенного предела, где можно остановиться, поэтому мы можем продолжать идти и в конечном итоге оказаться в бесконечных измерениях. По сути, именно здесь и находятся мои исследования в области теории категорий более высокого измерения, и когда мы увидим проблеск этого, настанет время закончить книгу. Для меня это предельная «конечная точка» теорий. Если теория категорий – это теория математики, то теория категорий более высокого измерения – это тоже теория категорий. Но теория категорий более высокой размерности по-прежнему остается теорией категорий более высокой размерности.

Речь идет не только об абстракции ради абстракции, хотя я считаю, что абстракция увлекательна сама по себе. Речь идет о тонкости. Теория категорий предполагает наличие более тонких способов описания объектов, сохраняя при этом строгость, и каждое дополнительное измерение дает нам еще один уровень возможной тонкости.

Тонкость и нюансы – это аспекты мышления, которых мне не хватает и которых я жажду в повседневной жизни. Теория категорий более высокого уровня учит нас находить баланс между нюансами и строгостью, чтобы нам не приходилось прибегать к черно-белому изображению.

Я думаю, что математика – это удивительно гибкая и управляемая среда, в которой можно практиковать такое мышление. Смысл в том, чтобы, даже если теория не применима напрямую в остальной части нашей жизни, математическое мышление стало второй натурой. Именно так я обнаружила, что теория категорий помогает мне в повседневной жизни, как бы удивительно это ни звучало.

1.8. Структура и методы

Как я уже говорила, теория категорий больше похожа на философию, чем на что-либо еще. Но дело в том, что философские понятия ей нужны только в качестве руководства. Это по-прежнему вполне строгая техническая математика. Она создает основу для реализации определений и достижения философских целей. В целом теория категорий состоит из формального определения категории как алгебраической структуры, а затем методов изучения этих структур, а также построения и исследования конкретных особенностей, которые могут в них возникнуть.

Так что, если мы собираемся углубиться в саму теорию, а не поэтически исследовать идеи, стоящие за ней, нам не обойтись без формальной математики. Формализм математики отталкивает от нее многих людей, поэтому я призываю видеть и ценить *идеи* математики, даже если вы не можете или не хотите следовать формальностям. Однако цель данной книги не в этом. (В каком-то смысле это была цель моей книги «How to Bake Pi».) Я действительно считаю, что такой подход к математике недооценен. Это немного похоже на поездку в страну, на языке которой вы не можете говорить. Я думаю, что довольно глупо отговаривать людей от посещения другой страны, пока они не выучат ее язык. Однако я также думаю, что если вы сможете хотя бы немного овладеть языком, то получите от визита намного больше. Вот для чего предназначена эта книга.

Математику иногда преподают так, как будто единственное правильное взаимодействие с ней – это уметь ей пользоваться. Как я говорила в прологе, в языках преподают аспекты воспроизведения и восприятия (а также культурный аспект, который, по моему опыту, не поддается исследованию). Когда мы говорим о базовом образовании, то часто имеем в виду чтение, письмо и арифметику. Помимо чрезмерного акцента на скучной арифметике (для которой у нас теперь есть калькуляторы в телефоне), никуда не годится подход, согласно которому для языка навыки чтения и письма разделены, а вот математика – это просто математика.

Я вовсе не ожидаю, что читатели этой книги овладеют всеми аспектами теории категорий. Моя цель не в том, чтобы научить вас проводить исследования в области теории категорий, а главным образом в том, чтобы вы смогли прочитать и оценить их, а также немного вникнуть в их формальный аппарат на случай, если вы все-таки захотите пойти дальше. В слово «туризм» иногда вкладывают уничижительный смысл: туристы воспринимаются как легкомысленные визитеры, которые делают селфи и уходят. Но хорошо информированные и любознательные туристы являются ценной частью культурного обмена. Я всегда ценила жизнь в местах, которые достаточно интересны и привлекают туристов со всего мира. И туристы иногда становятся постоянными гостями, постоянными жителями или даже гражданами. Один из способов выучить язык – это поселиться в чужой стране, где никто не говорит на вашем родном языке, но я не хочу подвергать вас такому шоку. Мы будем постепенно подбираться к формальному языку на протяжении нескольких следующих глав.