**УДК 514**
**ББК 22.151**
**П77**

**Прицкер Б.**
П77 Геометрический калейдоскоп / пер. с англ. Ю. В. Ревича. – М.: ДМК Пресс, 2025. – 198 с.: ил.

**ISBN 978-5-93700-357-7**

Эта книга рассказывает о наиболее увлекательных аспектах геометрии и раскрывает множество интересных геометрических закономерностей. Несмотря на разнообразие представленных задач, они не выходят за рамки базовых знаний, охватывающих учебную программу по геометрии средней школы. Также представлены многочисленные задания для самостоятельной тренировки, а их решения приводятся в конце книги.

Издание адресовано широкому кругу любителей интеллектуального досуга и может быть полезно руководителям математических кружков и преподавателям математики.

УДК 514
ББК 22.151

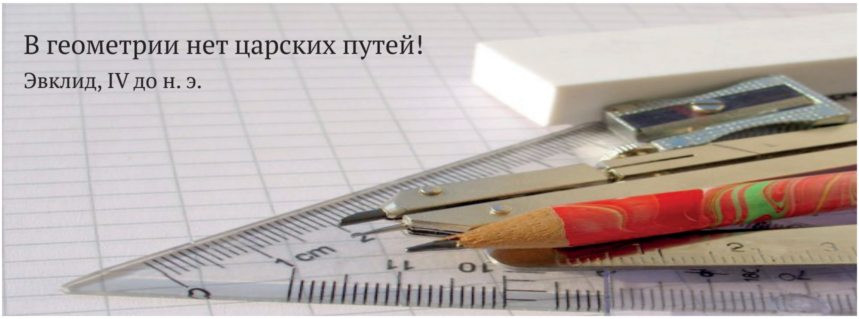


ISBN 978-9-81128-560-8 (англ.)

ISBN 978-5-93700-357-7 (рус.)

# СОДЕРЖАНИЕ

# ПРЕДИСЛОВИЕ



В геометрии нет царских путей!

Эвклид, IV до н. э.

«*Я больше не могу!*» — мой старший сын Алекс отложил домашнее задание по геометрии. — «*И пожалуйста, не говори мне, что я когда-нибудь воспользуюсь этим кошмаром где-нибудь, как-нибудь в жизни!*»

Мои героические попытки объяснить ему решение задачи о свойствах биссектрисы треугольника с треском провалились.

«*Тебе должно быть стыдно за себя. Я недавно опубликовал статью о свойствах биссектрисы,* — (см. главу 4), — *а у тебя не хватает терпения даже меня выслушать*».

Я привел этот последний аргумент, пытаясь привлечь его внимание к этой теме. Внезапно в его глазах вспыхнула искра, и он посмотрел на меня с явным выражением интереса на лице.

«*Могу я это увидеть?*»

«*Конечно, вот оно*», — я очень гордился собой.

Он просмотрел статью, прочитал несколько абзацев, а затем терпеливо позволил мне закончить объяснение решения его домашнего задания.

«*Не мог бы ты сделать для меня копию этой статьи?*» — спросил он, когда мы закончили делать домашнее задание. Это было настоящее удовольствие — услышать от него что-то подобное. Очевидно, ребенок хотел показать копию своим школьным друзьям и завоевать популярность благодаря математическим способностям отца.

Через несколько дней он вернулся из школы и рассказал мне, что получил пятерку за свою последнюю контрольную по геометрии. Мои усилия наконец окупились, и я был очень счастлив в течение нескольких дней. Потом я встретил его школьного друга. Он рассказал мне правдивую историю о том, как была получена пятерка.

Алекс — очень хороший теннисист. Его интересы всегда были связаны со спортом, и он никогда не был хорошим учеником по математике. Недостаток знаний и желания изучать предмет он компенсировал шутками и рассказами забавных историй во время занятий. Учителям всегда было трудно заставить его замолчать. Кстати, он ни разу не упомянул на уроках, что его отец был профессиональным математиком.

В тот день он раздражал учителя больше, чем обычно. В конце занятия Алекс объявил, что ему не нужно делать домашнее задание, поскольку он просто изучал эти свойства вместе со своим отцом, читая опубликованную статью в математическом журнале. Очевидно, было трудно представить, что он говорит правду.

«*Мне надоели твои фантазии. На этот раз я преподам тебе урок. Если ты принесешь эту статью завтра в класс, получишь пятерку на следующей контрольной, даже не выполняя ее. Но если у тебя статьи нет, домашнее задание увеличится втрое, и тебе придется сдавать мне каждую задачу*», — сказал учитель.

Желание учителя посмеяться над этим назойливым подростком было вполне понятно.

Вы знаете конец истории. Учитель сдержал свое слово.

Это был пока единственный опыт моего сына по использованию геометрии в реальной жизни. Признаюсь, хотя на уроках геометрии он и не преуспел, но методы, которым я его учил, он применял. Как насчет введения вспомогательных элементов (см. главу 8) для достижения цели получить хорошую оценку, не прилагая при этом особых усилий? Он использовал мою публикацию как вспомогательный элемент, чтобы спровоцировать учителя. Проблему получения хорошей оценки решали, не углубляясь в материал, даже без выполнения контрольного задания.

Прошло много лет. Алекс — взрослый мужчина, у него теперь своя семья. Когда мы оба вспоминаем эту забавную историю, он сожалеет, что не уделил больше времени математическим темам, и признает неоспоримую пользу изучения геометрии для развития и укрепления логического мышления.

Нет необходимости упоминать о важности математики, в том числе геометрии, в дошкольном образовании. Однако для многих детей математика зачастую является самым трудным предметом, и они теряют интерес и мотивацию.

Я надеюсь, что методы и концепции, обсуждаемые в книге, побудят читателей исследовать незнакомые или малоизвестные аспекты геометрии. Моей целью было пригласить к геометрии тех, кто страстно любит великий мир математики и восхищается им, в том числе моего младшего сына Брайана, который только что с отличием окончил колледж со степенью бакалавра по математике (очень горжусь им!). Его интерес к математике был одним из факторов, вдохновивших меня на создание этой книги. Он также оказал мне большую помощь при редактировании нескольких глав, и я благодарен ему за это.

Обычно мы испытываем самые большие трудности в начале процесса решения проблемы. С чего начать? Как вообще можно связать воедино условия задачи? Я думаю, ответом на эти типичные вопросы будет «распознать» проблему сразу после ее обнаружения. Под «распознаванием» я подразумеваю способность идентифицировать ее тип и определить наиболее важные из заданных условий, которые можно использовать в качестве кирпичиков при построении логической цепочки. Эта книга посвящена геометрическому мышлению — что оно означает, как его развивать и как его распознавать.

Платон, один из величайших философов в истории человечества, вывесил перед своей Академией лозунг: «*Пусть не войдет сюда никто, не знающий геометрии*».

Цель этой книги — дать представление о некоторых интересных и увлекательных аспектах геометрии и раскрыть множество интересных геометрических свойств. Темы охватывают хорошо известные свойства и теоремы, в том числе классические примеры, такие как закон рычага Архимеда, теорема Пифагора, формула Герона, формула Брахмагупты, теорема Аполлония, свойства линии Эйлера и окружности девяти точек, задача Фаньяно, теорема Штейнера—Лемуса, теорема Наполеона, теорема Чевы, теорема Помпейю и «чудо Морли». Книга «Геометрический калейдоскоп» состоит из калейдоскопа, казалось бы, не связанных на первый взгляд тем. Однако это восприятие исчезает по мере того, как вы переходите от главы к главе и исследуете множество удивительных отношений, неожиданных связей и взаимодействий. Наибольшее внимание следует уделять основополагающим принципам и основным этапам в решении проблем.

Читатели, решающие цепочку задач, узнают из этого общие приемы, а не отдельные случаи применения того или иного метода. Они могут использовать задачу в качестве ядра, вокруг которого можно построить набор более сложных проблем, приводящих к одному и тому же методу решения. Также мы демонстрируем, как поиск множественных решений проблемы помогает получить важные обобщения и новые неожиданные результаты.

Я считаю, что лучший способ выучить математику — это заниматься математикой.

Маркус дю Сотой, известный своей работой по популяризации математики, сказал: «*Сила математики часто заключается в том, чтобы превращать одну вещь в другую, превращать геометрию в язык*». Я надеюсь, что эта книга станет еще одним небольшим шагом в данном направлении и что темы и проблемы принесут читателям приятные впечатления.

Я очень благодарен читателям, которые написали рецензии на книгу на сайтах Amazon и LinkedIn и поделились со мной своим мнением. Их конструктивная критика и ободряющие комментарии сыграли важную роль в моем решении обновить и пересмотреть издание книги 2017 года и подготовить к публикации новое издание.

Эта книга посвящается обоим моим сыновьям, Брайану и Алексу, и их семьям, а особое внимание уделяется моим очаровательным внучкам Лиане и Лу́не. Я их очень люблю и желаю видеть их всех счастливыми и успешными в достижении своих целей в жизни. Посвящается она и моей жене Ирине, которая почти не жаловалась и терпеливо переживала недостаток моего внимания во время работы над книгой. Наконец, она посвящена моим покойным родителям, чьи любовь, поддержка и вдохновение всегда помогали мне в прошлом и останутся со мной до конца моей жизни.

# 1

# МЕДИАНЫ, ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ ЦЕНТР И ЦЕНТР МАСС СИСТЕМЫ ТОЧЕК

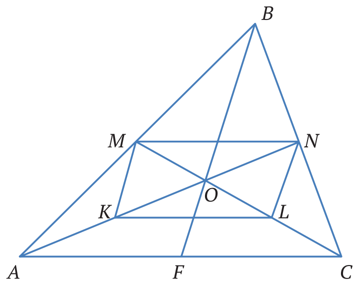
В каждом треугольнике есть три важных особых отрезка: медианы, высоты и биссектрисы. Мы рассмотрим некоторые интересные их свойства и продемонстрируем их применение при решении проблем. Начнем с медиан треугольника.

Медианой треугольника называется отрезок, проведенный из вершины треугольника к середине противоположной стороны.

*Три медианы в треугольнике пересекаются в одной общей точке, которая называется геометрическим центром треугольника*[1].

[1] Для **геометрического центра** треугольника (он же центр масс, см. далее) в русскоязычной литературе также употребляют название *центроид* (от термина *centroid*, принятого за рубежом). Мы в этом переводе оставляем более традиционное название.

*Она расположена на 2/3 пути от вершины до противолежащей средней точки. То есть медианы треугольника делят друг друга в соотношении 2:1.*




Докажем приведенные выше утверждения.

В треугольнике $ABC$ медианы — отрезки $AN$, $BF$ и $CM$. Нам нужно доказать, что они проходят через общую точку $O$ и эта точка разделяет каждую медиану в соотношении 2:1.

Треугольники $MBN$ и $ABC$ подобны, поскольку имеют общий угол $B$ и соответственные стороны, образующие угол $B$, находятся в одинаковом соотношении: $MB = \frac{1}{2}AB$ и $BN = \frac{1}{2}BC$.

Следовательно, равны углы $\angle BMN = \angle BAC$ и $\angle BNM = \angle BCA$ как соответственные углы подобных треугольников; откуда $MN \parallel AC$. Если мы выберем точки $K$ и $L$ на $OA$ и $OC$ соответственно так, что $OK = KA$ и $OL = LC$, то по аналогичным рассуждениям $KL \parallel AC$ (треугольники $KOL$ и $AOC$ подобны).

Отсюда следует, что отрезки $MN = KL = \frac{1}{2}AC$ и $MN \parallel KL$ (и $MN$, и $KL$ параллельны $AC$). Таким образом, $KMNL$ — параллелограмм, а $O$ — точка пересечения его диагоналей, которая делит диагонали пополам.

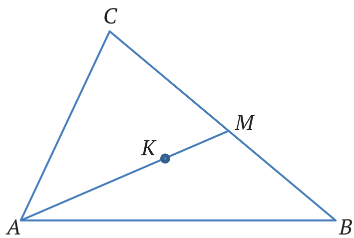
Тогда $ON = OK$ и $OM = OL$. Поскольку мы выбрали $K$ и $L$ так, что $OK = KA$ и $OL = LC$, мы получаем, что $AK = KO = ON$ и $CL = LO = OM$, поэтому точка $O$ делит медианы $AN$ и $CM$ на три части. Так как мы могли бы с таким же успехом начать с другой пары медиан, три медианы совпадают, и точка их пересечения делит каждую медиану в соотношении 2:1. Доказательство завершено.

В ходе доказательства появилось мощное свойство:

*Средняя линия треугольника (отрезок, соединяющий две середины двух сторон) параллелен противоположной стороне треугольника и ровно вдвое короче.*

Треугольник, образованный соединением середин сторон треугольника, называется срединным треугольником. Как мы заметили, у срединного треугольника три стороны параллельны сторонам исходного треугольника, поэтому треугольники подобны. Отношение соответственных сторон равно $\frac{1}{2}$.

**Задача 1.** Имеются три неколлинеарные[1] точки $A$, $B$ и $K$. Постройте треугольник $ABC$ так, чтобы точка $K$ была его геометрическим центром, а точки $A$ и $B$ — вершинами.




**Решение.** Для решения достаточно заметить, что если $K$ — геометрический центр треугольника $ABC$, то, расположив точку $M$ на продолжении $AK$ так, что $MK = \frac{1}{2}AK$, мы получим середину стороны $BC$. Нарисовав $BM$ и расположив на его продолжении точку $C$ так, что $MC = MB$, мы получим третью вершину треугольника. Последний шаг – соединить точки $A$ и $C$. $ABC$ – искомый треугольник.

Наши построения выполняются только с помощью циркуля и линейки (линейки без разметки — для проведения прямых линий), если специально не указано иное. Пояснения основных операций с циркулем и линейкой будут опущены[2] (мы их опустили в задаче выше). Однако мы рекомендуем читателям тщательно выполнить каждый шаг процесса выстраивания доказательства и его обоснования, определить уникальность решения и просмотреть альтернативные способы.

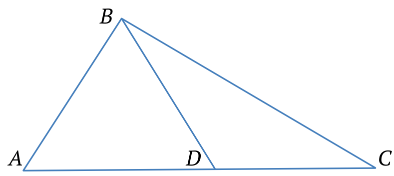
---

[1] То есть не лежащие на одной прямой.

[2] Подробности метода построения геометрических фигур «с помощью циркуля и линейки» см. в школьных учебниках геометрии или, например, в соответствующей статье в «Википедии»: *https://ru.wikipedia.org/wiki/Построение_с_помощью_циркуля_и_линейки*.

Медианы треугольника обладают несколькими важными свойствами.

**Теорема 1 (теорема Аполлония).** *Сумма квадратов любых двух сторон любого треугольника равна удвоенной сумме квадрата половины третьей стороны и квадрата медианы, делящей третью сторону пополам.*




**Доказательство.** Если $BD$ — медиана треугольника $ABC$, то нам нужно доказать, что

$$AB^2 + BC^2 = 2(BD^2 + AD^2).$$

Обозначим $\angle ADB = \alpha$ и $\angle BDC = \beta$. Углы $\alpha$ и $\beta$ являются дополнительными (до 180°)[1].

Таким образом, $\beta = 180° - \alpha$ и, следовательно,

$$\cos\beta = \cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha. \qquad (1)$$

Теперь применим закон косинусов к треугольникам $ABD$ и $BDC$:

$$AB^2 = BD^2 + AD^2 - 2AD \cdot BD \cdot \cos\alpha,$$

$$BC^2 = BD^2 + CD^2 - 2CD \cdot BD \cdot \cos\beta.$$

Вспомнив, что $AD = DC$ (поскольку $BD$ — медиана) и подставив (1) во второе равенство, получим, что $AB^2 + BC^2 = 2(BD^2 + AD^2)$, что и требовалось доказать.

Если обозначить стороны треугольника $ABC$ как $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$ и положить медиану $BD = m_b$, то после несложных манипу-

---

[1] **Дополнительными** (supplementary) называются углы, которые взаимно дополняют друг друга до угла 180°. Если такие углы прилегают к общей прямой, то их называют *смежными*. В школьных учебниках дополнительными называют *комплементарные* углы (complementary — дополняющие друг друга до 90°), поэтому во избежание разночтений мы здесь указываем значение суммарного угла.

ляций выражение медианы треугольника через его стороны будет иметь вид:

$$m_b = \tfrac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2c^2 - b^2}.$$

Аналогичные выражения справедливы и для других медиан:

$$m_a = \tfrac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2},$$

$$m_c = \tfrac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}.$$

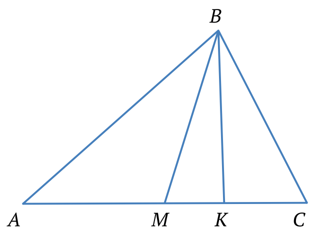
Нетрудно будет использовать приведенные выше формулы, чтобы выразить каждую сторону треугольника через его медианы. Мы предлагаем читателям выполнить эти манипуляции и запомнить формулы как важные и эффективные инструменты для использования в будущем:

$$b = \tfrac{2}{3}\sqrt{2m_a^2 + 2m_c^2 - m_b^2},$$

$$a = \tfrac{2}{3}\sqrt{2m_b^2 + 2m_c^2 - m_a^2},$$

$$c = \tfrac{2}{3}\sqrt{2m_a^2 + 2m_b^2 - m_c^2}.$$

**Теорема 2.** *Каждая медиана треугольника делит площадь треугольника пополам.*

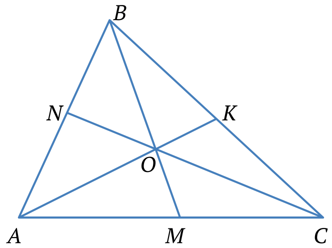



**Доказательство.** $BM$ — медиана, а $BK$ — высота в треугольнике $ABC$. Нам нужно доказать, что площади треугольников $ABM$ и $BMC$ равны.

Для доказательства применим формулу площади треугольника $S = \frac{1}{2}ah$ ($a$ — основание, $h$ — высота, опущенная к этому основанию) и заметим, что треугольники $AMB$ и $MBC$ имеют общую высоту $BK$ и равные основания. $AM = MC$.

Прямое следствие:

**Теорема 3.** *Треугольник разделен медианами на шесть треугольников одинаковой площади.*




**Доказательство.** Доказательство становится очевидным, если сравнить равные площади треугольников $ABM$ и $CBM$ с площадями треугольников, на которые они разделены медианами.

Из равенств $S_{AMB} = S_{AOB} + S_{AOM}$ и $S_{BMC} = S_{BOC} + S_{COM}$ следует, что

$$S_{AOB} + S_{AOM} = S_{BOC} + S_{COM}. \qquad (1)$$

Обратите внимание, что $OM$, $ON$ и $OK$ ($O$ — геометрический центр) — это медианы в треугольниках $AOC$, $AOB$ и $BOC$ соответственно. Следовательно, $S_{AOM} = S_{COM}$, $S_{AON} = S_{BON}$ и $S_{BOK} = S_{COK}$.

Мы видим, что из (1) следует $S_{AOB} = S_{BOC}$, или $2S_{BON} = 2S_{BOK}$ и окончательно $S_{BON} = S_{BOK}$.

Аналогично легко показать, что $S_{KOC} = S_{MOC}$. Мы видим, что площади каждого из шести маленьких треугольников равны, и каждая площадь составляет $\frac{1}{6}$ площади большого треугольника $ABC$.

Геометрический центр треугольника имеет еще одно распространенное название — центр масс, или центр тяжести. Прежде чем объяснить причину этого второго названия, мы введем общее определение центра масс для любой системы материальных точек.

М. Балк и В. Болтянский написали прекрасную статью «Применение понятия центра масс на факультативных занятиях по математике» (в журнале «Математика в школе» № 2, 1984, стр. 45–50), в котором они рассмотрели основные применения различных механических законов в геометрии. Мы ограничиваемся здесь изложением лишь нескольких приемов, тесно связанных с применением свойств центра масс системы точек при решении задач.

В физике материальная точка определяется как объект, размер которого пренебрежимо мал по сравнению с расстояниями в задаче. Для простоты такой объект рассматривается просто как точка (предполагается, что вся его масса сосредоточена в этой одной точке). Если масса $m$ сосредоточена в точке $A$, то обозначим эту материальную точку как $mA$. По определению точка $Z$ будет центром масс системы материальных точек $m_1A_1$, $m_2A_2$, ..., $m_nA_n$, если сумма всех соответствующих векторов равна нулевому вектору:

$$m_1\overrightarrow{ZA_1} + m_2\overrightarrow{ZA_2} + \cdots + m_n\overrightarrow{ZA_n} = \vec{0}.$$

Центр масс — это точка, в которой вся система будет идеально сбалансирована, предполагая однородную плотность и однородное гравитационное поле.

Чтобы лучше понять следующий материал, условимся переводить слова «сосредоточить массу $m$ в точке $A$» как «отнести количество $m$ к точке $A$». Выражение «материальная точка $mA$» должно тогда означать «точку $A$ вместе с количеством $m$, связанным с точкой $A$». Количество $m$ будем называть «массой материальной точки $mA$». Докажем теперь основную теорему о центре масс системы материальных точек.

**Теорема 4.** *Если точка $Z$ является центром масс (центром масс) системы материальных точек $m_1A_1$, $m_2A_2$, ..., $m_nA_n$, то для любой точки $O$ будет выполняться векторное равенство*:

$$\overrightarrow{OZ} = \frac{m_1\overrightarrow{OA_1} + m_2\overrightarrow{OA_2} + \cdots + m_n\overrightarrow{OA_n}}{m_1 + m_2 + \cdots + m_n}. \quad (1)$$

**Доказательство.** Для доказательства утверждения теоремы воспользуемся следующим свойством векторов: для любых точек $O$, $A$ и $Z$ вектор $ZA$ можно выразить как разность векторов $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OZ}$, $\overrightarrow{ZA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OZ}$. Когда каждый вектор умножается на $m$, это дает

$$m\overrightarrow{ZA} = m(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OZ}). \quad (2)$$

Теперь обратимся к определению центра масс системы материальных точек $m_1A_1$, $m_2A_2$, ..., $m_nA_n$. Если $Z$ — центр масс этой системы материальных точек, то

$$m_1\overrightarrow{ZA_1} + m_2\overrightarrow{ZA_2} + \cdots + m_n\overrightarrow{ZA_n} = \vec{0}.$$

Подставив выражение (2) для каждого вектора, получим, что

$$m_1(\overrightarrow{OA_1} - \overrightarrow{OZ}) + m_2(\overrightarrow{OA_2} - \overrightarrow{OZ}) + \cdots + m_n(\overrightarrow{OA_n} - \overrightarrow{OZ}) = \vec{0}.$$

Несколько достаточно простых преобразований дают желаемый результат:

$$\overrightarrow{OZ} = \frac{m_1\overrightarrow{OA_1} + m_2\overrightarrow{OA_2} + \cdots + m_n\overrightarrow{OA_n}}{m_1 + m_2 + \cdots + m_n}.$$

Верно и обратное утверждение: если для любой точки $O$ выполнено равенство (1), то $Z$ является центром масс системы материальных точек $m_1A_1, m_2A_2, \ldots, m_nA_n$.

Предлагаем читателям самостоятельно доказать это утверждение.

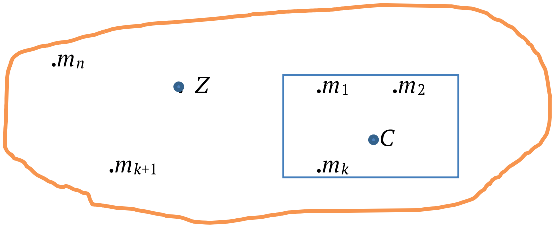
Согласно теореме, любая система материальных точек должна иметь центр масс — единственную точку, определяемую формулой (1). Центр масс — это среднее арифметическое точек, взвешенных согласно их массам.

Формула (1) значительно упрощается, когда общая масса системы равна 1. Тогда мы имеем распределение массы = 1 между точками $A_1$, $A_2$, …, $A_n$. Если $x_1A_1, x_2A_2, \ldots, x_nA_n$ — материальные точки с массой = 1, распределенной между ними равномерно, а $Z$ — центр масс системы, то для любой точки $O$ получаем упрощенное выражение:

$$\overrightarrow{OZ} = x_1\overrightarrow{OA_1} + x_2\overrightarrow{OA_2} + \cdots + x_n\overrightarrow{OA_n}.$$

Что произойдет с центром масс системы материальных точек, если точки каким-либо образом перегруппировать или реорганизовать? Это важный практический вопрос, который необходимо понять и применить при решении многих проблем. Следующая теорема дает ответ.

**Теорема 5.** *Пусть существует система из $k$ материальных точек $m_1A_1$, $m_2A_2$, …, $m_kA_k$ в общей системе $n$ материальных точек $m_1A_1$, $m_2A_2$, …, $m_nA_n$. Пусть $C$ — центр масс системы $k$ точек. Если вес системы $k$ точек сконцентрировать в точке $C$, то положение центра масс всей системы $n$ точек не изменится. Другими словами, система материальных точек $(m_1 + m_2 + \cdots + m_k)C$, $m_{k+1}A_{k+1}, \ldots, m_nA_n$ и исходная система из $n$ точек $m_1A_1$, $m_2A_2$, …, $m_nA_n$ имеют одинаковый центр масс.*




**Доказательство.** Ограничимся рассмотрением случая $n = 5$ и $k = 3$ (в общей системе из 5 точек выделяется система из 3 точек). Общее доказательство будет точно таким же.

Пусть $Z$ — центр масс системы 5 точек $m_1A_1$ $m_2A_2$, $m_3A_3$, $m_4A_4$, $m_5A_5$. Тогда:

$$m_1\overrightarrow{ZA_1} + m_2\overrightarrow{ZA_2} + m_3\overrightarrow{ZA_3} + m_4\overrightarrow{ZA_4} + m_5\overrightarrow{ZA_5} = \vec{0}.$$

Было дано, что $C$ — центр масс трех точек $m_1A_1$, $m_2A_2$ и $m_3A_3$.

Поэтому $\overrightarrow{ZC} = \frac{m_1\overrightarrow{ZA_1} + m_2\overrightarrow{ZA_2} + m_3\overrightarrow{ZA_3}}{m_1 + m_2 + m_3}$. Подставив это выражение в (3), получим, что $(m_1 + m_2 + m_3)\overrightarrow{ZC} + m_4\overrightarrow{ZA_4} + m_5\overrightarrow{ZA_5} = \vec{0}$. откуда следует, что по определению точка $Z$ остается центром масс точек $(m_1 + m_2 + m_3)C$, $m_4A_4$ и $m_5A_5$. Это завершает доказательство теоремы.

Когда мы имеем систему двух материальных точек $m_1A_1$ и $m_2A_2$, то по определению точка $Z$ является центром масс такой системы, если $m_1\overrightarrow{ZA_1} + m_2\overrightarrow{ZA_2} = \vec{0}$ или $m_1\overrightarrow{ZA_1} = -m_2\overrightarrow{ZA_2}$.

Из последнего векторного равенства следует, что векторы $ZA_1$ и $ZA_2$ коллинеарны[1] и имеют противоположные направления, а это значит, что $Z$ лежит на отрезке $A_1A_2$ и расстояние $m_1ZA_1$ равно расстоянию $m_2ZA_2$. Этот факт подтверждает закон Архимеда о рычаге. Видим, что $ZA_1/ZA_2 = m_2/m_1$, откуда следует, что центр масс двух материальных точек $m_1A_1$ и $m_2A_2$ делит отрезок $A_1A_2$ в отношении $m_2/m_1$, считая от точки $A_1$.

Выдающийся изобретатель и математик Древней Греции Архимед (287–212 до н. э.) первым ввел метод открытия новых геометрических теорем с помощью механики. Однажды он сказал: «*Дайте мне точку опоры, и я переверну Землю*». Какую точку он имел

---

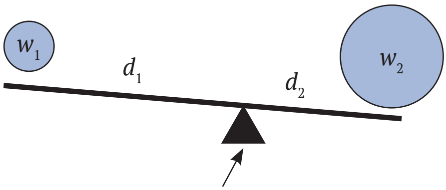
[1] **Коллинеарные векторы** — параллельные или лежащие на одной прямой.

в виду? Как лучше всего опереться для такого действия? Должна ли эта точка быть точкой идеального баланса? Если говорить о треугольнике, то такой точкой является его геометрический центр. Теперь понятно, почему он носит другое название — центр масс, или центр тяжести.

В своей работе «О равновесии плоских фигур» великий ученый сформулировал положение, которое мы описали выше и которое сегодня известно как закон рычага Архимеда:

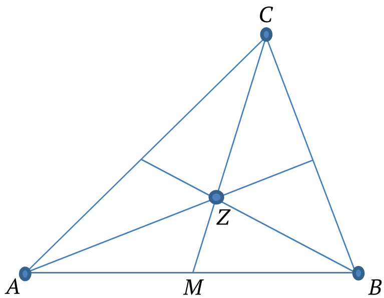
*Соизмеримые величины уравновешиваются на длинах, которые будут обратно пропорциональны тяжестям.*

**Закон рычага**




$$w_1 \times d_1 = w_2 \times d_2$$

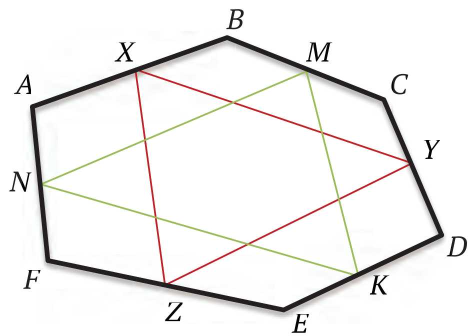
Здесь мы готовы принять еще одно яркое и изящное доказательство (его открытие также приписывают Архимеду) существования центра масс и его расположения в треугольнике, составляющее две трети расстояния от вершины до середины противоположной стороны.



Поместим в каждую вершину треугольника $ABC$ одинаковые гири весом 1 фунт. Обозначим через $Z$ центр масс этой системы трех материальных точек $1A$, $1B$ и $1C$. Если переместить гири из точек $A$ и $B$ в середину $M$ отрезка $AB$, то в точке $M$ окажется 2 фунта, а в точке $C$ — еще 1 фунт. Такое смещение не повлияет на положение центра масс $Z$. Однако теперь наша система состоит из двух материальных точек $2M$ (2 фунта) и $1C$ (1 фунт). Следовательно, точка $Z$ должна лежать на $CM$. Без потери общности мы могли бы выбрать другую медиану и сделать точно такое же наблюдение, следовательно, $Z$ также должна лежать на каждой из двух других медиан. Согласно закону рычага Архимеда, если $Z$ — центр масс точек $2M$ и $1C$, то расстояние от $Z$ до $M$ составляет половину расстояния от $Z$ до $C$, что и доказывает искомое утверждение.

Применяя вышеперечисленные принципы, можно получить неожиданные элегантные и красивые решения многих нетривиальных задач. Вот несколько примеров.

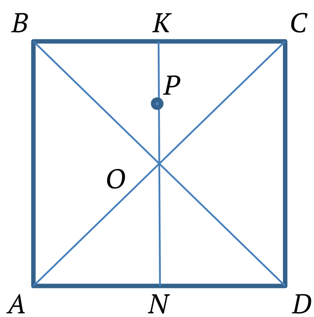
**Задача 2.** Для любого выпуклого шестиугольника доказать, что геометрические центры двух треугольников, образованных соединением середин несмежных сторон шестиугольника, совпадают.




**Решение.** В данном шестиугольнике $ABCDEF$ точки $X$, $M$, $Y$, $K$, $Z$ и $N$ являются серединами его сторон. Соединив точки $X$, $Y$ и $Z$, получим треугольник $XYZ$; соединив точки $N$, $M$ и $K$, получим треугольник $NMK$. Наша цель — доказать, что точки пересечения медиан обоих треугольников совпадают. Проблема может стать настоящей катастрофой, если вы незнакомы с определением центра масс системы точек и его свойствами. С другой стороны, если вы примените свои знания к этой ситуации, то получите простое и короткое решение, даже не найдя на чертеже центр масс каждого треугольника. Чтобы решить эту задачу, нам всего лишь нужно двумя разными методами найти расположение центра масс многоугольника и сравнить полученные результаты.

Давайте поместим одну и ту же единицу массы в каждую вершину шестиугольника. Тогда центр масс точек $A$ и $B$ сосредоточен в середине $X$ отрезка $AB$. То же самое справедливо и для середин остальных пяти сторон шестиугольника. Очевидно, что центр масс шести вершин шестиугольника — это та же самая точка, что и центр масс системы трех точек $X$, $Y$ и $Z$ или точек $N$, $K$ и $M$. Другими словами, центр масс шестиугольника должен совпадать с центром масс треугольника $XYZ$ или треугольника $NKM$. Для каждого треугольника центром масс является его центр масс. Поскольку у многоугольника только один центр масс, центры масс треугольников $XYZ$ и $NKM$ должны совпадать. Доказательство завершено.

**Задача 3.** Дан квадрат $ABCD$ со стороной длины $a$. Каково расстояние от точки $P$ до центра этого квадрата, если $P$ удовлетворяет условию $\overrightarrow{PA} + 3\overrightarrow{PB} + 3\overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD} = \vec{0}$?




**Решение.** По определению центра масс системы материальных точек точка $P$ должна быть центром масс материальных точек $1A$, $3B$, $3C$ и $1D$. Также обратите внимание, что центр квадрата точка $O$ является его центром масс. Перенесем массу трех единиц из точек $B$ и $C$ в их центр масс — середину $K$ отрезка $BC$. Масса в 6 единиц теперь сосредоточена в точке $K$, т. е. мы получаем материальную точку $6K$. Аналогичным образом смещаем 1 единицу массы от $A$ и $D$ к их центру масс, средней точке $N$ отрезка $AD$. Получаем материальную точку $2N$. Очевидно, что все три точки $K$, $N$ и $O$ должны лежать на одной прямой. Как доказано в теореме 5, положение центра масс системы $1A$, $3B$, $3C$ и $1D$ не изменится. Теперь мы можем рассматривать $P$ как центр масс двух материальных точек $6K$ и $2N$, из чего следует, что $P$ также должна лежать на $KN$. По закону рычага Архимеда $PK/PN = \frac{2}{6}$. Тогда $PK = 3PK$.

Обратите внимание, что $PK + PN = KN = a$ (если длина стороны квадрата равна $a$, то $KN = a$). Получаем, что $PK = \frac{1}{4}a$. Последним шагом является следующий результат для искомого расстояния:

$$PO = KO - PK = \tfrac{1}{2}a - \tfrac{1}{4}a = \tfrac{1}{4}a.$$

Как видите, эти методы предполагают широкое использование векторной алгебры. Решение многих задач, связанных с центром масс, можно существенно упростить за счет введения векторов и манипуляций с ними. Очень часто задача, решаемая применением свойств центра масс, может быть переведена в векторную алгебру, и наоборот.

Вот несколько упражнений для самостоятельной практики.

**Задача 4.** $BD$ и $CE$ — медианы в треугольнике $ABC$. $M$ — его центр масс. Докажите, что площадь треугольника $BCM$ равна площади четырехугольника $AEMD$.

**Задача 5.** Пусть $m_a$, $m_b$ и $m_c$ — медианы треугольника $ABC$. Обозначим через $q$ полусумму медиан: $q = \frac{1}{2}(m_a + m_b + m_c)$. Докажите, что площадь $S$ треугольника $ABC$ можно вычислить по формуле $S = \frac{4}{3}\sqrt{q(q - m_a)(q - m_b)(q - m_c)}$.

**Задача 6.** В данном треугольнике $ABC$ $m_1$, $m_2$ и $m_3$ обозначают длины трех его медиан, при этом $m_1^2 + m_2^2 = 5m_3^2$. Докажите, что ABC — прямоугольный треугольник.

**Задача 7.** Точка $M$ лежит на стороне $AC$ треугольника $ABC$, при этом $MC = 2AM$. Точка $N$ лежит на продолжении стороны $BC$ и $BN = BC$. Точка $P$ — точка пересечения $NM$ и $AB$. Каково соотношение $AP$:$PB$?

**Задача 8.** Длины сторон треугольника равны 11, 13 и 12. Найти длину медианы, опущенной на большую сторону.