

УДК 681.5:004
ББК 32.816
Ч57

Чжан Мин

Ч57 Сервисные антропоморфные роботы / пер. с кит. Е. В. Шарковой. – М.: ДМК Пресс, 2026. – 182 с.: ил.

ISBN 978-5-93700-421-5

Сервисные роботы играют важную роль в улучшении качества жизни людей и все шире применяются в нестандартных ситуациях и опасных средах. Уровень их развития отражает научно-технический потенциал страны, поэтому такие роботы привлекают к себе большое внимание. Тем не менее на сегодняшний день их способности к автономному планированию и выполнению операций в сложных условиях остаются ограниченными. В данной книге рассматриваются вопросы кинематики и методов планирования траектории для манипуляторов антропоморфных (человекоподобных) сервисных роботов с целью повышения уровня их интеллектуализации.

Книга будет полезна инженерам и исследователям, занятым разработкой антропоморфных сервисных роботов, а также преподавателям, студентам и аспирантам соответствующих специальностей вузов.

УДК 681.5:004
ББК 32.816

All rights reserved. First published in the Chinese language under the title Humanoid Service Robots: Kinematics and Path Planning (9787122462404) Chemical Industry Press Co., Ltd. Russian translation rights arranged with Chemical Industry Press Co., Ltd. (CIP) through Media Solutions, Tokyo Japan (info@mediasolutions.jp).

Все права защищены. Любая часть этой книги не может быть воспроизведена в какой бы то ни было форме и какими бы то ни было средствами без письменного разрешения владельцев авторских прав.

ISBN 978-7-122-46240-4 (кит.)

ISBN 978-5-93700-421-5 (рус.)

Copyright© 2025 Chemical Industry Press Co., Ltd.

© Перевод, оформление, издание, ДМК Пресс, 2026

Содержание

От издательства	8
Предисловие	9
Глава 1. Введение	11
1.1. Возникновение и применение человекоподобных сервисных роботов	11
1.2. Развитие человекоподобных сервисных роботов и ключевые технологии	14
1.2.1. Обзор исследований и применений человекоподобных сервисных роботов	14
1.2.2. Основы и передовые направления кинематики роботов	19
1.2.3. Методы и подходы к планированию траектории	23
1.2.4. Планирование траектории манипулятора сервисного робота	26
1.3. Ключевые технологии и технические трудности	28
Глава 2. Анализ и моделирование кинематики манипулятора.....	30
2.1. Обзор анализа и моделирования кинематики манипулятора.....	30
2.2. Методы описания положения и ориентации твердого тела.....	31
2.3. Анализ прямой кинематики манипулятора	33
2.4. Иерархический итерационный метод обратного решения на основе эвристики	37
2.4.1. Принцип метода FABRIK.....	37
2.4.2. Оценка обратного решения на основе метода C-FABRIK	40
2.4.3. Снижение размерности уравнений обратной кинематики на основе аналитического подхода.....	44
2.4.4. Процесс реализации эвристического послойного итеративного метода.....	47
2.4.5. Выбор избыточных решений обратной задачи	49
2.5. Анализ производительности эвристического послойного итеративного метода.....	51
2.6. Анализ скорости и ускорения манипулятора	60
2.7. Моделирование и анализ эвристического метода обратной кинематики	62
2.7.1. Настройка эксперимента	62
2.7.2. Результаты моделирования и обсуждение.....	64
2.8. Выводы по главе	72
Глава 3. Методы статического планирования траекторий манипулятора	73
3.1. Обзор методов статического планирования траекторий манипулятора....	73

3.2. Планирование траектории	75
3.2.1. Конфигурационное пространство.....	75
3.2.2. Представление препятствий и планируемых траекторий	76
3.3. Основы метода быстрого роста дерева (FMT*).....	78
3.4. Метод быстрого роста дерева на основе информированного семплирования и произвольного времени (IAFMT*).....	82
3.4.1. Обзор метода IAFMT*.....	82
3.4.2. Планирование осуществимых траекторий на основе гибридного инкрементального поиска	85
3.4.3. Основы технологии информированного семплирования.....	87
3.4.4. Планирование высококачественных траекторий на основе динамического оптимального поиска	88
3.4.5. Формирование и корректировка субоптимальных соединений в траектории	91
3.5. Анализ производительности метода IAFMT*	94
3.5.1. Вероятностная полнота	94
3.5.2. Асимптотическая оптимальность	100
3.5.3. Сложность алгоритма.....	103
3.6. Эксперименты и анализ.....	105
3.6.1. Настройка экспериментов по тестированию производительности	105
3.6.2. Результаты и обсуждение тестов.....	107
3.6.3. Моделирование и анализ манипулятора	110
3.7. Выводы по главе	112

Глава 4. Методы динамического планирования траекторий манипулятора

4.1. Обзор методов динамического планирования траекторий манипулятора	113
4.2. Модель регрессии на основе гауссовских процессов.....	114
4.3. Метод гауссовского стохастического динамического планирования.....	117
4.3.1. Базовая структура динамического планирования	117
4.3.2. Генерация случайных траекторий на основе регрессии гауссовского процесса.....	118
4.3.3. Локальное динамическое сглаживание траекторий	121
4.4. Анализ производительности метода гауссовского стохастического планирования.....	125
4.5. Эксперименты и анализ динамического избегания препятствий.....	130
4.6. Выводы по главе	132

Глава 5. Проектирование системы манипулятора и интеллектуальный захват

5.1. Обзор проектирования системы манипулятора и интеллектуального захвата	134
5.2. Обзор экспериментальной платформы человекоподобного сервисного робота.....	135

5.3. Проектирование системы манипулятора сервисного робота	139
5.3.1. Анализ требований к проектированию системы манипулятора	139
5.3.2. Конструкция общей архитектуры манипулятора	140
5.3.3. Выбор аппаратных компонентов системы манипулятора.....	141
5.3.4. Архитектура системы управления манипулятором.....	153
5.4. Проектирование и построение системы захвата сервисного робота	154
5.4.1. Общая схема системы захвата	154
5.4.2. Реализация системы захвата	156
5.5. Эксперименты по захвату и размещению объектов	159
5.5.1. Настройка экспериментов со статическим планированием	160
5.5.2. Результаты и обсуждение экспериментов со статическим планированием	161
5.5.3. Настройка экспериментов с динамическим планированием	166
5.5.4. Результаты и обсуждение экспериментов с динамическим планированием	168
5.6. Выводы по главе	172
Список литературы	174

Глава 2

Анализ и моделирование кинематики манипулятора

2.1. Обзор анализа и моделирования кинематики манипулятора

Кинематический анализ направлен на описание геометрических взаимосвязей между звеньями многозвенной структуры манипулятора во время их согласованного движения. Это составляет теоретическую основу для управления рабочими операциями манипулятора. Решение задачи обратной кинематики – одна из ключевых задач в кинематическом анализе манипулятора. По своей сути это задача решения высокоразмерной нелинейной системы алгебраических уравнений [126]. Как правило, основные методы решения задачи обратной кинематики для манипуляторов делятся на два типа – аналитические и численные [127].

Аналитические методы используют алгебраическое исключение переменных для декомпозиции и уменьшения размерности системы уравнений, что обеспечивает высокую скорость и точность вычислений. Однако в настоящее время не существует универсального метода упрощения, и этот процесс часто требует значительного опыта или даже удачи [128]. Кроме того, аналитические методы применимы лишь к определенным конфигурациям манипуляторов, таким как многозвенные манипуляторы со сферическим запястьем, в которых три оси вращения в области запястья пересекаются в одной точке. Манипуляторы с несферическим запястьем, обладающие большей гибкостью и прочностью конструкции (включая варианты с числом степеней свободы в запястье менее трех), как правило, не допускают аналитического решения, поэтому для них обычно применяются численные методы.

Численные методы, как правило, основаны на многопараметрической итерации, при которой путем многократного повторения достигается заданная

точность решения. Эти методы применимы ко всем конфигурациям манипуляторов – как с декомпозируемой, так и с недекомпозируемой структурой, благодаря чему они вызывают широкий интерес среди исследователей. Поэтому разработка метода обратного кинематического расчета, сочетающего высокую скорость и точность, имеет принципиально важное значение.

В данной главе предлагается эвристический иерархический итерационный алгоритм для решения задачи обратной кинематики шестистепенного манипулятора с несферическим запястьем. Метод основан на двухуровневой итерации. На первом уровне используется эвристический геометрический метод для быстрой генерации разумных начальных значений, что существенно снижает вычислительную нагрузку второго уровня. На втором уровне итерации применяется аналитический подход для преобразования исходной шестимерной нелинейной системы в одномерное нелинейное уравнение, которое затем решается с помощью итерационного одномерного поиска. Использование аналитического метода позволяет значительно сократить количество итераций и одновременно получить несколько решений, что повышает гибкость работы манипулятора. Предложенный эвристический иерархический алгоритм объединяет достоинства аналитического и численного подходов. По сравнению с традиционными методами он обладает более широкой применимостью, высокой точностью решений и быстрой сходимостью, что делает его особенно подходящим для точного и быстрого расчета обратной кинематики манипуляторов домашних сервисных роботов.

2.2. Методы описания положения и ориентации твердого тела

Описание взаимного положения и ориентации манипулятора и других объектов в декартовом пространстве является основой для построения кинематических уравнений манипулятора. В данной книге используется метод однородных преобразований для описания положения и ориентации (позы) твердого тела в пространстве.

В прямоугольной декартовой системе координат $\{A\}$ положение произвольной точки P может быть представлено в виде вектора положения ${}^A P$ размерности 3×1 :

$${}^A P = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix}, \quad (2.1)$$

где p_x, p_y, p_z – это координаты точки P по осям x, y и z в системе координат $\{A\}$.

Предположим, что в системе координат $\{A\}$ существует твердое тело B , к которому прикреплена система координат $\{B\}$, и ее начало O_B совпадает

с некоторой характерной точкой тела B , например с его центром масс. Система координат $\{B\}$ относительно $\{A\}$ обладает как вращением, так и смещением. Пусть x_B, y_B, z_B – единичные векторы, соответствующие осям системы координат $\{B\}$. Тогда ориентация системы $\{B\}$ относительно $\{A\}$ представляется матрицей вращения ${}^A_B\mathbf{R}$, составленной из направляющих косинусов векторов $[x_B, y_B, z_B]$, выраженных в системе $\{A\}$:

$${}^A_B\mathbf{R} = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x \\ n_y & o_y & a_y \\ n_z & o_z & a_z \end{bmatrix}. \quad (2.2)$$

Компоненты этой матрицы являются единичными векторами, взаимно ортогональными попарно. Матрица вращения ${}^A_B\mathbf{R}$ удовлетворяет следующим условиям:

$$\begin{cases} {}^A_B\mathbf{R}^{-1} = {}^A_B\mathbf{R}^T \\ |{}^A_B\mathbf{R}| = 1 \end{cases}. \quad (2.3)$$

Следовательно, при вращении твердого тела B на угол θ вокруг осей x , y и z соответственно матрицы вращения в системе координат $\{A\}$ имеют следующий вид:

$$\mathbf{R}(x, \theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}, \quad (2.4)$$

$$\mathbf{R}(y, \theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}, \quad (2.5)$$

$$\mathbf{R}(z, \theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.6)$$

Положение начала координат $\{B\}$, обозначенного как O_B в системе координат $\{A\}$, описывается вектором положения ${}^A_B\mathbf{P}$. Таким образом, как показано на рис. 2.1, положение и ориентация тела B в системе координат $\{A\}$ могут быть заданы с помощью матрицы $[{}^A_B\mathbf{R}, {}^A_B\mathbf{P}]$.

Для удобства вычисления матрицы положения-ориентации $[{}^A_B\mathbf{R}, {}^A_B\mathbf{P}]$ преобразуем ее в однородную матрицу, описывающую позу тела B в системе координат $\{A\}$. Такая однородная матрица позы имеет вид:

$${}^A_B\mathbf{T} = \begin{bmatrix} {}^A_B\mathbf{R} & {}^A_B\mathbf{P} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.7)$$

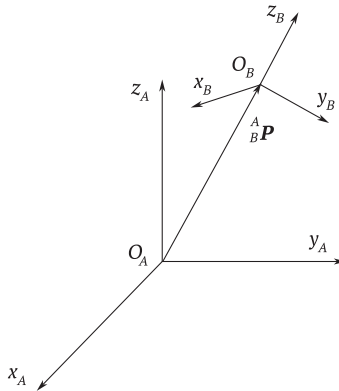


Рис. 2.1 ❖ Описание позы твердого тела в декартовом пространстве

Матрица вращения ${}^A_B \mathbf{R}$ и вектор смещения ${}^A_B \mathbf{P}$ реализуются в виде 4×4 однородных преобразований, применяемых к системе координат $\{A\}$, позволяя выполнить операции вращения и переноса. Операторы вращения $\mathbf{Rot}(K, \theta)$ и переноса $\mathbf{Trans}({}^A_B \mathbf{P})$ определяются следующим образом:

$$\mathbf{Rot}(K, \theta) = \begin{bmatrix} {}^A_B \mathbf{R}(K, \theta) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.8)$$

$$\mathbf{Trans}({}^A_B \mathbf{P}) = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{3 \times 3} & {}^A_B \mathbf{P} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.9)$$

где K – ось вращения (одна из x_B, y_B, z_B), а θ – угол вращения. Следовательно, итоговая однородная матрица преобразования принимает вид:

$${}^A_B \mathbf{T} = \mathbf{Trans}({}^A_B \mathbf{P}) \cdot \mathbf{Rot}(K, \theta). \quad (2.10)$$

2.3. Анализ прямой кинематики манипулятора

Задача прямой кинематики манипулятора заключается в определении положения и ориентации его конечного звена при известных типах всех сочленений, длинах звеньев и углах поворота. Для анализа прямой кинематики обычно применяется метод D–H (Denavit–Hartenberg) [131], который позволяет построить кинематическую модель соседних звеньев. Этот метод был предложен Денавитом и Хартенбергом в 1955 году и впоследствии стал стандартным методом построения кинематических моделей роботов, получив широкое распространение. Метод D–H описывает пространственные гео-

метрические взаимосвязи между звеньями с помощью четырех параметров: длины звена a , угла наклона α , смещения вдоль оси d и угла сочленения θ . При этом параметры d и θ определяют взаимное расположение соседних звеньев. Для полностью вращательного манипулятора с 6 степенями свободы переменной величиной является угол θ , тогда как длина звена a , угол α и смещение d остаются фиксированными.

Таблица 2.1. D–H-параметры манипулятора

i	a_{i-1} (м)	α_{i-1} (°)	d_i (м)	θ_i (°)
1	0	0	0	θ_1
2	0	90	0	θ_2
3	0	-90	d_3	θ_3
4	0	-90	0	θ_4
5	0	90	d_5	θ_5
6	0	-90	0	θ_6

Местная система координат звеньев манипулятора представлена на рис. 2.2. В качестве примера рассмотрим левый манипулятор, где базовая система координат обозначена как $O-x_0y_0z_0$, а система координат i -го сочленения как $O-x_iy_iz_i$, где $i = 1, 2, \dots, 6$. Параметры D–H-манипулятора перечислены в табл. 2.1, при этом длина звена a_{i-1} – это расстояние вдоль оси x_{i-1} от оси z_{i-1} до оси z_i , угол наклона α_{i-1} – это угол, измененный вокруг оси x_{i-1} между осями z_{i-1} и z_i , а смещение d_i – угол, измеренный вокруг оси z_{i-1} между осями x_{i-1} и x_i , угол сочленения θ_i – угол, измеренный вокруг оси z_{i-1} между осями x_{i-1} и x_i .

Положение и ориентация между двумя соседними системами координат $\{i\}$ и $\{i-1\}$ задаются переменной сочленения θ и параметрами a , α , d . Таким образом, положение системы координат $\{i\}$ относительно $\{i-1\}$ можно описать с помощью однородной матрицы преобразования ${}^{i-1}T$ ($i = 1, 2, \dots, 6$), которая определяется с использованием четырех вышеуказанных параметров. Эта матрица представляет собой последовательность элементарных матриц преобразования, соответствующих параметрам D–H:

$$\begin{aligned}
 {}^{i-1}T &= \mathbf{Rot}(z_{i-1}, \theta_i) \mathbf{Trans}(z_{i-1}, d_i) \mathbf{Trans}(x_{i-1}, \alpha_i) \mathbf{Rot}(x_{i-1}, \alpha_i) \\
 &= \begin{bmatrix} c\theta_i & -s\theta_i & 0 & a_{i-1} \\ s\theta_i c\alpha_{i-1} & c\theta_i c\alpha_{i-1} & -s\alpha_{i-1} & -d_i s\alpha_{i-1} \\ s\theta_i s\alpha_{i-1} & c\theta_i s\alpha_{i-1} & c\alpha_{i-1} & d_i c\alpha_{i-1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{2.11}
 \end{aligned}$$

При этом $c\theta_i$ обозначает $\cos \theta_i$, $s\theta_i$ обозначает $\sin \theta_i$.

Подставив D–H-параметры из табл. 2.1 в формулу (2.11), получаем однородную матрицу преобразования между координатными системами соседних суставов:

$$\left\{ \begin{array}{l}
 {}^0_1\mathbf{T} = \begin{bmatrix} c\theta_1 & -s\theta_1 & 0 & 0 \\ s\theta_1 & c\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad {}^1_2\mathbf{T} = \begin{bmatrix} c\theta_2 & -s\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ s\theta_2 & c\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 {}^2_3\mathbf{T} = \begin{bmatrix} c\theta_3 & -s\theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -d_3 \\ -s\theta_3 & -c\theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad {}^3_4\mathbf{T} = \begin{bmatrix} c\theta_4 & -s\theta_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -s\theta_4 & -c\theta_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 {}^4_5\mathbf{T} = \begin{bmatrix} c\theta_5 & -s\theta_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -d_5 \\ s\theta_5 & c\theta_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad {}^5_6\mathbf{T} = \begin{bmatrix} c\theta_6 & -s\theta_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ s\theta_6 & -c\theta_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
 \end{array} \right. \quad (2.12)$$

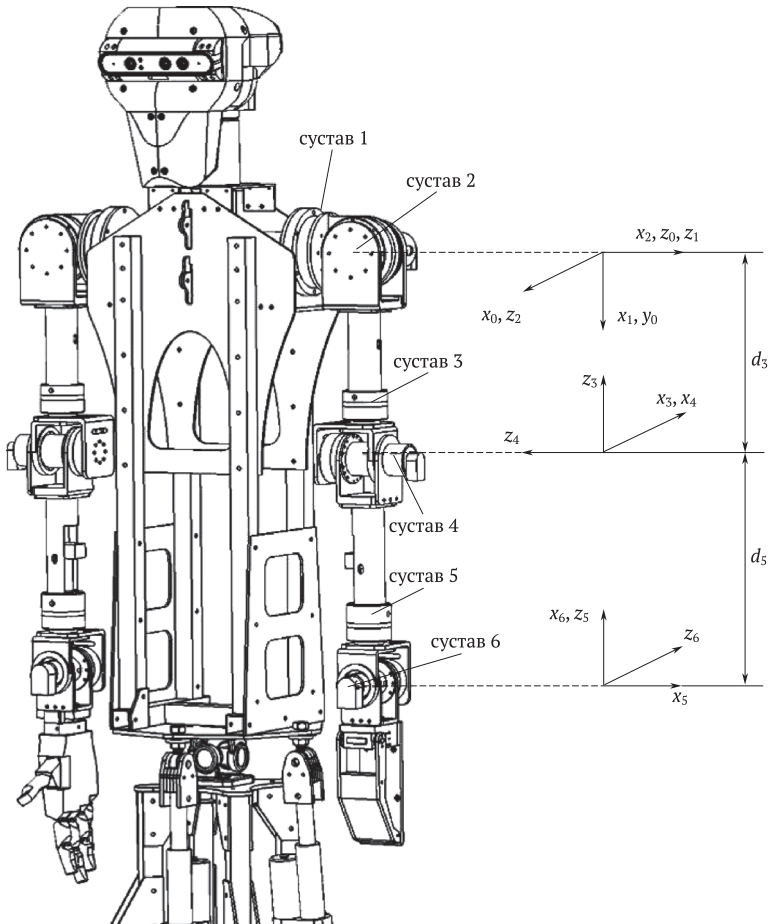


Рис. 2.2 ❖ Система координат звеньев манипулятора

Однородная матрица преобразования системы координат конечного звена манипулятора относительно базовой системы координат 0T может быть получена путем последовательного перемножения матриц преобразования соседних суставов, то есть в виде уравнения прямой кинематики манипулятора:

$$\begin{aligned} {}^0T &= {}^0T_1 T_2 T_3 T_4 T_5 T_6 T \\ &= \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{3 \times 3} & \mathbf{P}_{3 \times 1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

При этом матрица вращения $\mathbf{R}_{3 \times 3}$ описывает ориентацию (позу) конечного исполнительного органа, а матрица переноса $\mathbf{P}_{3 \times 1}$ – положение конечного исполнительного органа. Элементы матрицы в формуле (2.13) имеют вид:

$$n_x = -c\theta_6 \{c\theta_5 [c\theta_4 (s\theta_1 s\theta_3 - c\theta_1 c\theta_2 c\theta_3) - c\theta_1 s\theta_2 s\theta_4] + s\theta_5 (c\theta_3 s\theta_1 + c\theta_1 c\theta_2 s\theta_3)\} + s\theta_6 [s\theta_4 (s\theta_1 s\theta_3 - c\theta_1 c\theta_2 c\theta_3) + c\theta_1 c\theta_4 s\theta_2];$$

$$n_y = c\theta_6 \{c\theta_5 [c\theta_4 (c\theta_1 s\theta_3 + s\theta_1 c\theta_2 c\theta_3) + s\theta_1 s\theta_2 s\theta_4] + s\theta_5 (c\theta_3 c\theta_1 - s\theta_1 c\theta_2 s\theta_3)\} - s\theta_6 [s\theta_4 (c\theta_1 s\theta_3 + s\theta_1 c\theta_2 c\theta_3) - s\theta_1 c\theta_4 s\theta_2];$$

$$n_z = -c\theta_6 [c\theta_5 (c\theta_2 s\theta_4 - c\theta_3 c\theta_4 s\theta_2) + s\theta_2 s\theta_3 s\theta_5] - s\theta_6 (c\theta_2 c\theta_4 + c\theta_3 s\theta_2 s\theta_4);$$

$$o_x = s\theta_6 \{c\theta_5 [c\theta_4 (s\theta_1 s\theta_3 - c\theta_1 c\theta_2 c\theta_3) - c\theta_1 s\theta_2 s\theta_4] + s\theta_5 (c\theta_3 s\theta_1 + c\theta_1 c\theta_2 s\theta_3)\} + c\theta_6 [s\theta_4 (s\theta_1 s\theta_3 - c\theta_1 c\theta_2 c\theta_3) + c\theta_1 c\theta_4 s\theta_2];$$

$$o_y = -s\theta_6 \{c\theta_5 [c\theta_4 (c\theta_1 s\theta_3 + s\theta_1 c\theta_2 c\theta_3) + s\theta_1 s\theta_2 s\theta_4] + s\theta_5 (c\theta_3 c\theta_1 - s\theta_1 c\theta_2 s\theta_3)\} - c\theta_6 [s\theta_4 (c\theta_1 s\theta_3 + s\theta_1 c\theta_2 c\theta_3) - s\theta_1 c\theta_4 s\theta_2];$$

$$o_z = s\theta_6 [c\theta_5 (c\theta_2 s\theta_4 - c\theta_3 c\theta_4 s\theta_2) + s\theta_2 s\theta_3 s\theta_5] - c\theta_6 (c\theta_2 c\theta_4 + c\theta_3 s\theta_2 s\theta_4);$$

$$a_x = s\theta_5 [c\theta_4 (s\theta_1 s\theta_3 - c\theta_1 c\theta_2 c\theta_3) - c\theta_1 s\theta_2 s\theta_4] - c\theta_5 (c\theta_3 s\theta_1 + c\theta_1 c\theta_2 s\theta_3);$$

$$a_y = -s\theta_5 [c\theta_4 (c\theta_1 s\theta_3 + s\theta_1 c\theta_2 c\theta_3) + s\theta_1 s\theta_2 s\theta_4] + c\theta_5 (c\theta_3 c\theta_1 - s\theta_1 c\theta_2 s\theta_3);$$

$$a_z = s\theta_5 (c\theta_2 s\theta_4 - c\theta_3 c\theta_4 s\theta_2) - s\theta_2 s\theta_3 c\theta_5;$$

$$p_x = d_5 [s\theta_4 (s\theta_1 s\theta_3 - c\theta_1 c\theta_2 c\theta_3) + c\theta_1 c\theta_4 s\theta_2] + d_3 c\theta_1 s\theta_2;$$

$$p_y = -d_5 [s\theta_4 (c\theta_1 s\theta_3 + s\theta_1 c\theta_2 c\theta_3) - s\theta_1 c\theta_4 s\theta_2] + d_3 s\theta_1 s\theta_2;$$

$$p_z = -d_5 (c\theta_2 c\theta_4 + c\theta_3 s\theta_4 s\theta_2) - d_3 c\theta_2.$$

Таким образом, при заданных переменных сочленений θ_i , $i = 1, 2, \dots, 6$, для манипулятора человекоподобного сервисного робота можно с помощью

уравнения прямой кинематики (формула 2.13) вычислить положение и ориентацию исполнительного органа.

2.4. Иерархический итерационный метод обратного решения на основе эвристики

Процесс решения обратной задачи кинематики манипулятора противоположен прямой задаче, то есть при заданной позе (положении и ориентации) конечного исполнительного органа в базовой системе координат необходимо определить все углы поворота сочленений. Для описанного в данной книге шестистепенного манипулятора обратная задача формулируется следующим образом: по заданным матрицам переноса $\mathbf{P}_{3 \times 1}$ и вращения $\mathbf{P}_{3 \times 1}$ необходимо найти значения переменных сочленений θ_i , $i = 1, 2, \dots, 6$. Как показано на рис. 2.2, манипулятор имеет запястье с двумя степенями свободы и не является шарнирным, что делает применение аналитических методов затруднительным. Поэтому в данном разделе предлагается иерархический итерационный метод на основе эвристики, сочетающий достоинства аналитического и численного подходов для решения обратной задачи кинематики манипулятора.

2.4.1. Принцип метода FABRIK

Метод FABRIK (Forward and Backward Reaching Inverse Kinematics), предложенный в 2011 году Андреасом Аристиду из Кембриджского университета, представляет собой эвристический итерационный метод на основе геометрического подхода, позволяющий получить гладкую и естественную конфигурацию кинематической цепи при минимальных вычислительных затратах. Алгоритм успешно применяется в компьютерной анимации и разработке игр, где в сочетании с технологиями захвата движения позволяет обрабатывать сложную скелетную анимацию персонажей. Полный итерационный цикл метода FABRIK включает прямой (Forward Reaching) и обратный (Backward Reaching) проходы, в которых с помощью отрезков между точками последовательно уточняются положения всех сочленений в пространстве. Метод отличается простотой, высокой эффективностью и плавностью результирующего движения.

Поток выполнения метода FABRIK показан на рис. 2.3. На примере плоскогортрезвенного манипулятора на рис. 2.4 поясняется конкретная реализация данного метода. Пусть известны положения сочленений p_1, p_2, p_3 и конечного исполнительного органа p_4 , которые формируют кинематическую цепь. Со-

членение p_1 – это фиксированное основание, подвижное, но не перемещаемое. Все сочленения могут свободно вращаться, длины звеньев – d_1, d_2, d_3 , а целевая точка обозначается как t . Конкретная реализация FABRIK включает следующие шаги:

- 1) **проверка достижимости цели.** Для быстрого определения существования решения обратной задачи на начальной конфигурации цепи, как показано на рис. 2.4(a), проверяется, лежит ли целевая точка t в пределах прямой досягаемости цепи. Если прямая расстояния от корневого сочленения до целевой точки удовлетворяет:

$$|d_1 + d_2 + d_3| \geq |p_1 - t|, \quad (2.14)$$

тогда целевая прямая является достижимой, обратное решение существует и может быть выполнен процесс прямого поиска. В противном случае задача не имеет решения, и процесс поиска обратного решения завершается. Проверка достижимости прямой позволяет определить, существует ли решение задачи обратной кинематики для кинематической цепи без ограничений на суставы. При одновременном учете диапазонов вращения суставов такая проверка позволяет лишь установить возможность существования обратного решения;

- 2) **прямой поиск**, как показано на рис. 2.4(b)–(d). На рис. 2.4(b) конечный исполнительный орган p'_4 перемещается в целевую точку, в результате чего получается положение p'_4 . На рис. 2.4(c) соединяются точки p_4 и p'_4 ; на прямой $p_3p'_4$ определяется положение точки p'_3 , при этом расстояние между p'_3 и p'_4 равно d_3 . Далее с использованием метода выборки корректируются суставы p'_2 и p'_1 , как показано на рис. 2.4(d), завершая один цикл прямого поиска и получая положение кинематической цепи $p'_1 - p'_2 - p'_3 - p'_4$;
- 3) **обратный поиск**, как показано на рис. 2.4(e), (f).

После завершения прямого поиска соответствующие суставы отклоняются от исходных положений. Поскольку положение корневого сустава является фиксированным, корневой сустав p''_1 перемещается обратно в исходное положение p''_1 , как показано на рис. 2.4(e). Затем, как на рис. 2.4(f), с использованием метода, аналогичного прямому поиску, последовательно определяются положения суставов p''_2, p''_3 и конечного исполнительного органа p''_4 , завершая один цикл обратного поиска и получая положение кинематической цепи $p''_1 - p''_2 - p''_3 - p''_4$;

- 4) **проверка точности.** После каждого полного прохода вперед и назад рассчитывается расстояние между положением конечного звена p''_4 и целевой точкой t . Если это расстояние меньше либо равно заданному порогу точности, итерации завершаются, и текущая конфигурация звеньев считается одной из решений задачи обратной кинематики. В противном случае прямой и обратный проходы продолжают до тех пор, пока алгоритм не сойдется или не будет выполнено другое условие завершения.

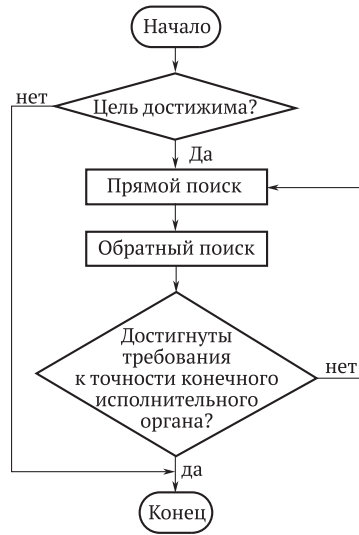


Рис. 2.3 ❖ Блок-схема алгоритма FABRIK

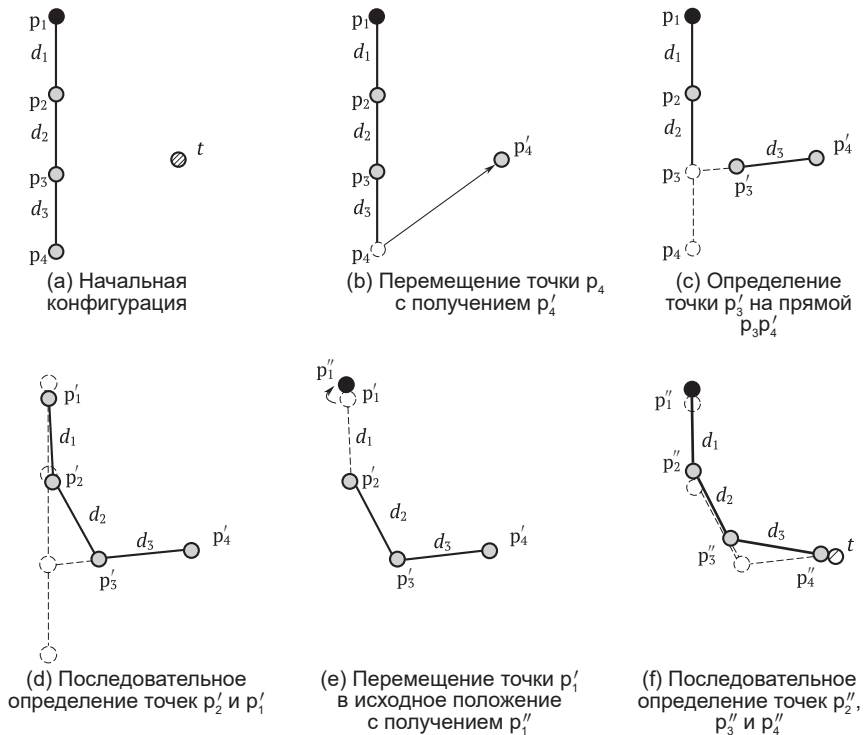


Рис. 2.4 ❖ Итерационный процесс алгоритма FABRIK

Метод FABRIK в процессе итераций учитывает только положения сочленений и использует простую геометрию точек и линий, что обеспечивает

быструю сходимость к заданной точности. Однако этот метод не позволяет эффективно получать множество решений, поэтому его гибкость в практических применениях ограничена.

2.4.2. Оценка обратного решения на основе метода C-FABRIK

В области трехмерной анимации и виртуального моделирования метод FABRIK получил широкое признание благодаря высокой скорости получения обратных решений и низким вычислительным затратам. Однако в таких приложениях, как анимация и игры, требования к ограничению сочленений и позы цели нестрогие, поэтому метод FABRIK не учитывает ограничения суставов и ориентации цели, что делает его непригодным для прямого применения в решении задач обратной кинематики манипуляторов. В этом разделе предлагается модификация метода – Constrained (ограниченный) FABRIK (сокращенно C-FABRIK), в которой добавлены более строгие ограничения. Метод C-FABRIK используется для вычисления приближенного обратного решения манипулятора, служащего начальными значениями для последующего численного решения. Итерационный процесс метода C-FABRIK немного отличается от классического метода FABRIK. В качестве примера рассматривается разработанный в данной работе шестистепенной человекоподобный манипулятор. Процессы прямого и обратного проходов показаны

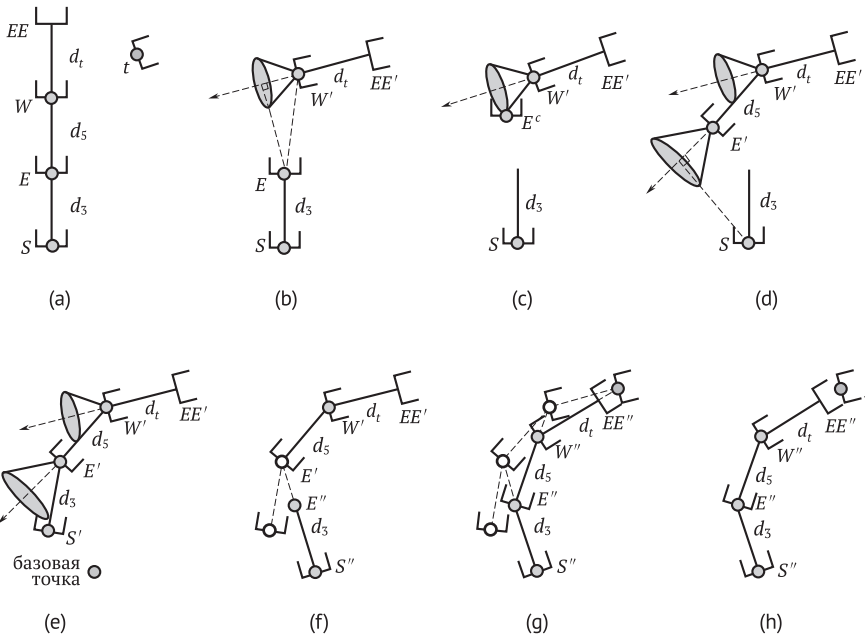


Рис. 2.5 ❖ Процесс прямого и обратного поиска манипулятора

на рис. 2.5. EE , W , E и S обозначают соответственно: исполнительный орган, сустав запястья, сустав локтя и сустав плеча. Плечевой сустав S включает сочленения 1 и 2, локтевой сустав W включает сочленения 3 и 4, а запястный сустав E включает сочленения 5 и 6. Длины звеньев d_3 и d_5 соответствуют параметрам D–H из табл. 2.1. d_i – длина звена конечного звена, t – целевое положение конечного звена. Алгоритм реализуется следующим образом:

- 1) проверка достижимости цели. Манипулятор находится в исходной конфигурации, как показано на рис. 2.5(a). Проверяется, меньше ли прямое расстояние между точкой цели t и плечевым суставом S , чем общая длина кинематической цепи. Если да – начинается итерационный процесс, если нет – решение отсутствует, алгоритм завершается;
- 2) прямой проход, как показано на рис. 2.5(b)–(e). На шаге, представленном на рис. 2.5(b), исполнительный орган EE перемещается в положение и ориентацию, совпадающие с целевыми t , получая новое положение EE' . Поскольку ориентация исполнительного органа по отношению к его звену фиксирована, можно напрямую определить положение запястья W' . Расстояние между W' и EE' равно d_i . Проводится перпендикуляр от локтевого сустава E к прямой $EE'W'$. В плоскости, перпендикулярной этой прямой, определяется допустимая область для соединяющего звена – это заштрихованная область на рис. 2.5(b). Таким образом, можно косвенно определить диапазон вращения запястного сочленения W' . Соотношение между допустимым диапазоном вращения и достижимой областью показано на рис. 2.6. Значения β_i ($i = 1, \dots, 4$) представляют собой углы поворота сустава W' , а q_i ($i = 1, \dots, 4$) определяют допустимую область. Связь между ними выражается уравнением:

$$q_i = L \tan(\beta_i), \quad (2.15)$$

где L – расстояние от запястного сустава W' до основания перпендикуляра O .

На рис. 2.5(c) показано, как вдоль построенной ранее перпендикулярной прямой перемещается локтевой сустав E до границы допустимой области, получая точку E' . Далее по прямой $E'W'$ определяется положение локтевого сустава E' , как показано на рис. 2.5(d). Аналогичным образом определяется положение плечевого сустава, что завершает один цикл прямого поиска, формируя цепь движений $S'-E'-W'-EE'$, как показано на рис. 2.5;

- 3) обратный поиск, как показано на рис. 2.5(f)–(h), выполняется аналогично методу FABRIK. В процессе поиска ограничения по суставам не учитываются, что позволяет дополнительно повысить эффективность. Подробнее см. раздел 2.4. После одного шага обратного поиска получается новая цепь движения $S''-E''-W''-EE''$, как показано на рис. 2.5(h). Хотя обратный поиск без ограничений не может гарантировать, что все углы суставов останутся в допустимых пределах, превышение обычно оказывается незначительным. В следующей итерации прямой поиск с учетом ограничений скорректирует это отклонение. По мере увели-

чения числа итераций величина нарушения ограничений по суставам будет уменьшаться и в итоге стремиться к нулю, обеспечивая приближенное численное решение;

- 4) проверка точности. Этот этап аналогичен методу FABRIK, см. раздел 2.4.1.

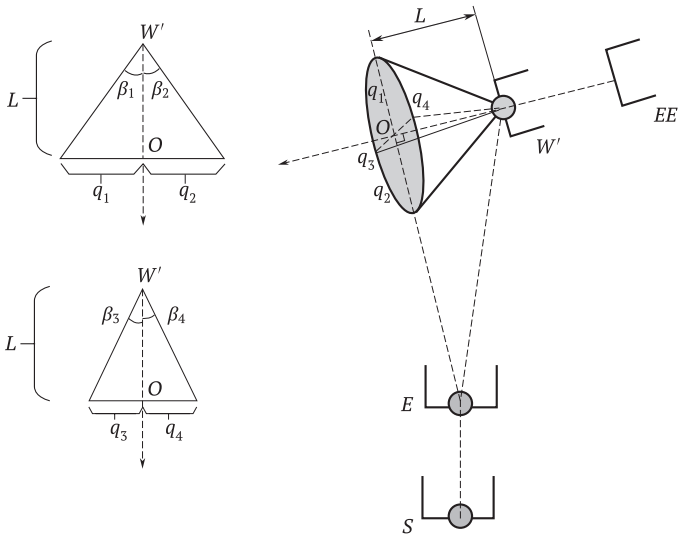


Рис. 2.6 ❖ Определение диапазонов вращения суставов

Метод C-FABRIK позволяет быстро и стабильно формировать начальное значение для второго уровня численной итерации. Это начальное значение приближено к обратному решению, что позволяет существенно сократить объем вычислений на втором уровне. На втором уровне численная итерация использует в качестве входных данных угол вращения сустава 1, полученный на первом уровне, и позу конечного эффектора. Поскольку процесс численного поиска основан на аналитических методах, можно получить несколько решений: на каждый угол сустава 1 – до 4 обратных решений. Таким образом, метод C-FABRIK требует получения множества приближенных решений, чтобы определить несколько допустимых значений угла сустава 1.

Так как численные итерационные методы чувствительны к начальному приближению, изменение начальных условий может привести к различным результатам вычислений. Вдохновленные этим свойством, в данной книге автору предлагают способ получения нескольких решений, как показано на рис. 2.7. Так как для манипулятора с шестью степенями свободы и шаровидным запястьем обычно существует два решения для угла сустава 1, задаются две начальные конфигурации: одна с максимальным, а другая с минимальным значением угла сустава 1, при этом остальные углы остаются неизменными, как показано на рис. 2.7, (а) и (с). Используя эти две позы в качестве начальных условий, метод C-FABRIK способен вычислить два приближенных обратных решения,

после чего значения угла сустава 1 из них используются как начальные приближения для второго уровня итераций, как показано на рис. 2.7, (b) и (d).

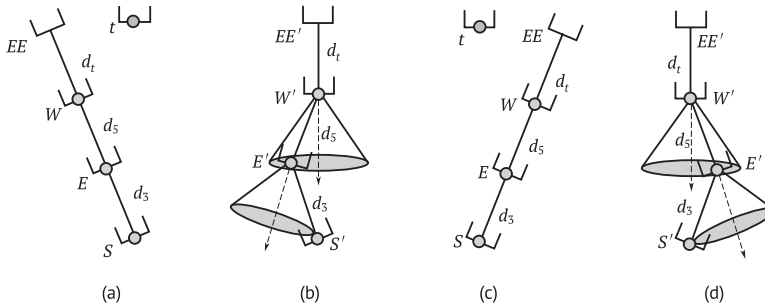


Рис. 2.7 ❖ Множество обратных решений манипулятора

Метод вычисления угла поворота сустава 1 θ_1 для кинематической цепи $S-E-W-EE$ показан на рис. 2.8. Плоскость Φ перпендикулярна оси 1-го сустава; вектор \mathbf{v}_0 направлен вертикально вниз и лежит в плоскости Φ , вектор \mathbf{v}_1 направлен из точки S в точку E , а вектор \mathbf{v}_2 представляет собой проекцию вектора \mathbf{v}_1 на плоскость Φ . В связи с этим угол поворота сустава 1 θ_1 вычисляется по формуле:

$$\theta_1 = \arccos\left(\frac{\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{v}_2}{|\mathbf{v}_0| |\mathbf{v}_2|}\right). \quad (2.16)$$

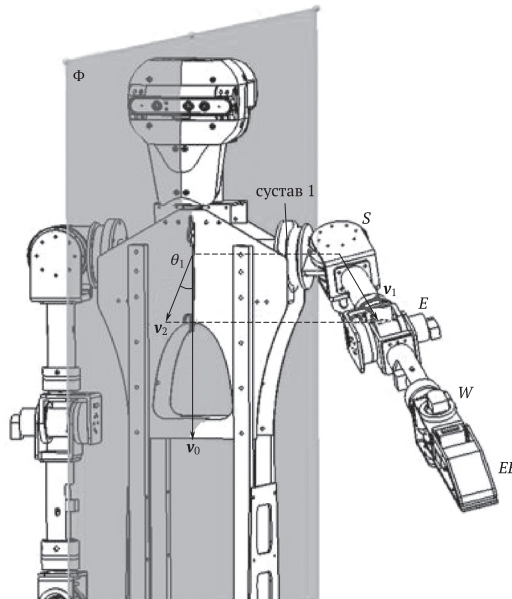


Рис. 2.8 ❖ Вычисление угла поворота сустава 1

2.4.3. Снижение размерности уравнений обратной кинематики на основе аналитического подхода

Для манипуляторов с шаровидным запястьем аналитический метод позволяет полностью разделить позицию и ориентацию, тем самым обеспечивая быстрое и точное решение задачи обратной кинематики. Однако у большинства шестистепенных последовательных манипуляторов положение и ориентация не могут быть полностью разделены, поэтому приходится использовать численные итерационные методы для нахождения решений, удовлетворяющих требованиям по точности. Общие численные методы получения обратного решения для манипулятора с 6 степенями свободы обычно требуют многопеременных итераций. Скорость вычислений и точность решения зависят от размерности уравнений, и снижение размерности позволяет повысить как скорость сходимости, так и точность вычислений. На практике оси соседних звеньев у манипуляторов с 6 степенями свободы обычно либо параллельны, либо взаимно перпендикулярны. Для манипуляторов с такой структурой уравнения обратной кинематики можно свести к одномерной форме. Таким образом, переменная одного сустава может быть найдена численно, а остальные – выражены аналитически через эту переменную. Структура манипулятора, рассматриваемого в данной работе, удовлетворяет вышеуказанным условиям для уменьшения размерности. Переменные суставов $\theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5, \theta_6$ могут быть выражены аналитически через положение и ориентацию исполнительного органа и значение переменной θ_1 .

1. Нахождение θ_2

Если левую часть уравнения (2.13) домножить на ${}^0_1\mathbf{T}$, то получим:

$${}^0_1\mathbf{T}^{-1}(\theta_1){}_6^0\mathbf{T} = {}_6^1\mathbf{T}(\theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5, \theta_6). \quad (2.17)$$

Из равенства элементов матриц в строках (1,4) и (3,4) уравнения (2.17) можно получить:

$$\begin{cases} p_x c\theta_1 + p_y s\theta_1 = d_5(c\theta_4 s\theta_2 - c\theta_2 c\theta_3 s\theta_4) + d_3 s\theta_2 \\ p_z = -d_5(c\theta_2 c\theta_4 + c\theta_3 s\theta_2 s\theta_4) - d_3 c\theta_2 \end{cases} \quad (2.18)$$

Возводим обе части формулы (2.18) в квадрат и выполняем суммирование, получаем:

$$(p_x c\theta_1 + p_y s\theta_1)s\theta_2 - p_z c\theta_2 = (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 + d_3^2 - d_5^2)/2d_3. \quad (2.19)$$

Преобразуем выражение (2.17), получаем:

$$\begin{cases} p_x c\theta_1 + p_y s\theta_1 = \rho c\phi \\ p_z = \rho s\phi \end{cases}, \quad (2.20)$$

где

$$\begin{cases} \rho = [(p_x c\theta_1 + p_y s\theta_1)^2 + p_x^2]^{1/2} \\ \phi = A \tan 2(p_z, p_x c\theta_1 + p_y s\theta_1) \end{cases} \quad (2.21)$$

Подставляем формулу (2.21) в формулу (2.20) и получаем два решения для угла θ_2 сустава 2:

$$\begin{cases} \sin(\theta_2 - \phi) = k/\rho \\ \cos(\theta_2 - \phi) = \pm \sqrt{1 - \left(\frac{k}{\rho}\right)^2} \\ \theta_2 = \phi + A \tan 2\left(k/\rho, \pm \sqrt{1 - (k/\rho)^2}\right) \end{cases} \quad (2.22)$$

где

$$\begin{cases} \rho = [(p_x c\theta_1 + p_y s\theta_1)^2 + p_z^2]^{1/2} \\ \phi = A \tan 2(p_z, p_x c\theta_1 + p_y s\theta_1) \\ k = (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 + d_3^2 - d_5^2)/2d_3 \end{cases} \quad (2.23)$$

2. Вычисление θ_4

Последовательно умножаем слева на обратные матрицы ${}^0\mathbf{T}$ и ${}^1\mathbf{T}$ обе части формулы (2.13), получаем:

$${}^0\mathbf{T}^{-1}(\theta_1, \theta_2) {}^0\mathbf{T} = {}^2\mathbf{T}(\theta_3, \theta_4, \theta_5, \theta_6). \quad (2.24)$$

Приравнивая элементы (2, 4) матриц в левой и правой частях равенства (2.24), получаем:

$$p_z c\theta_2 - p_x c\theta_1 s\theta_2 - p_y s\theta_1 s\theta_2 - 2 = -d_3 - d_5 c\theta_4. \quad (2.25)$$

Из формулы (2.25) получаем два решения для угла θ_4 переменной сустава 4

$$\begin{cases} c\theta_4 = x \\ c\theta_4 = \pm \sqrt{1 - c^2\theta_4} \\ \theta_4 = A \tan 2\left(\pm \sqrt{1 - c^2\theta_4}, x\right) \end{cases} \quad (2.26)$$

где

$$x = (p_x c\theta_1 s\theta_2 + p_y s\theta_1 s\theta_2 - p_z c\theta_2 - d_3)/d_5. \quad (2.27)$$

3. Вычисление θ_3

Приравнивая суммы элементов (1, 4) и (3, 4) матриц в левой и правой частях равенства (2.24), получаем:

$$\begin{cases} p_z s\theta_2 + p_x c\theta_1 c\theta_2 + p_y c\theta_2 s\theta_1 = -d_5 c\theta_3 s\theta_4 \\ p_x s\theta_1 - p_y c\theta_1 = d_3 s\theta_3 s\theta_4 \end{cases} \quad (2.28)$$

Из формулы (2.28) вычисляем решения для переменной сустава 3 θ_3 , рассматривая два случая. При $s\theta_4 \neq 0$ переменная θ_3 имеет два решения.

$$\theta_3 = \text{Atan2}(p_x s\theta_1 - p_y c\theta_1, -p_z s\theta_2 - p_x c\theta_1 c\theta_2 - p_y c\theta_2 s\theta_1). \quad (2.29)$$

Если $s\theta_4 = 0$ равен 0° или 180° , оси суставов 3 и 5 становятся соосными, и из выражения (2.28) невозможно вывести аналитическую формулу для θ_3 ; тем самым механизм оказывается в сингулярной конфигурации. В этом случае конечный исполнительный орган может двигаться только по прямой, то есть число степеней свободы манипулятора уменьшается. Поскольку $\theta_4 = 180^\circ$ выходит за пределы допустимого диапазона сустава, рассматривается только случай $\theta_4 = 0^\circ$, при этом манипулятор находится в сингулярной конфигурации, а переменная сустава 3 θ_3 может принимать произвольное значение.

4. Вычисление θ_5

Последовательно умножаем слева на обратные матрицы ${}^0_1\mathbf{T}$, ${}^1_2\mathbf{T}$, ${}^2_3\mathbf{T}$, ${}^3_4\mathbf{T}$ обе части формулы (2.13), получаем:

$${}^0_4\mathbf{T}^{-1}(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4) {}^0_6\mathbf{T} = {}^4_6\mathbf{T}(\theta_5, \theta_6). \quad (2.30)$$

Приравнивая элементы (1, 3) и (3, 3) матриц в левой и правой частях равенства (2.30), получаем решение для переменной θ_5 сустава 5:

$$\theta_5 = \text{Atan2}(-\zeta, \eta), \quad (2.31)$$

где

$$\begin{cases} \zeta = a_x(c\theta_1 s\theta_2 s\theta_4 - c\theta_4 s\theta_1 s\theta_3 + c\theta_1 c\theta_2 c\theta_3 c\theta_4) - a_x(c\theta_2 s\theta_1 - c\theta_3 c\theta_4 s\theta_2) \\ \eta = a_y(c\theta_1 c\theta_3 - c\theta_2 s\theta_1 s\theta_3) - a_x(c\theta_3 s\theta_1 + c\theta_1 c\theta_2 s\theta_3) - a_z s\theta_2 s\theta_3 \end{cases} \quad (2.32)$$

5. Вычисление θ_6

Приравнивая элементы (2,1) и (2,2) матриц в левой и правой частях равенства (2.30), получаем решение для переменной θ_6 сустава 6:

$$\theta_6 = \text{Atan2}(\lambda, \tau), \quad (2.33)$$

где

$$\begin{aligned} \lambda = & n_x(s\theta_1 s\theta_3 s\theta_4 + c\theta_1 c\theta_4 s\theta_2 - c\theta_1 c\theta_2 c\theta_3 s\theta_4) \\ & - n_z(c\theta_2 c\theta_4 + c\theta_3 s\theta_2 s\theta_4) - n_y(c\theta_1 s\theta_3 s\theta_4 - c\theta_4 s\theta_1 s\theta_2 + c\theta_2 c\theta_3 s\theta_1 s\theta_4), \end{aligned} \quad (2.34)$$

$$\begin{aligned} \tau = & o_x(s\theta_1 s\theta_3 s\theta_4 + c\theta_1 c\theta_4 s\theta_2 - c\theta_1 c\theta_2 c\theta_3 s\theta_4) \\ & - o_z(c\theta_2 c\theta_4 + c\theta_3 s\theta_2 s\theta_4) - o_y(c\theta_1 s\theta_3 s\theta_4 - c\theta_4 s\theta_1 s\theta_2 + c\theta_2 c\theta_3 s\theta_1 s\theta_4). \end{aligned} \quad (2.35)$$

Таким образом, аналитические выражения для $\theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5, \theta_6$ задаются через θ_1 . Далее методом C-FABRIK вычисляется два возможных решения для переменной θ_1 сустава 1, после чего по приведенным аналитическим выражениям последовательно получают решения для θ_2, θ_3 и θ_4 , затем вычисляются решения для θ_5 и θ_6 . В итоге получается 8 наборов обратных решений, как показано на рис. 2.9.

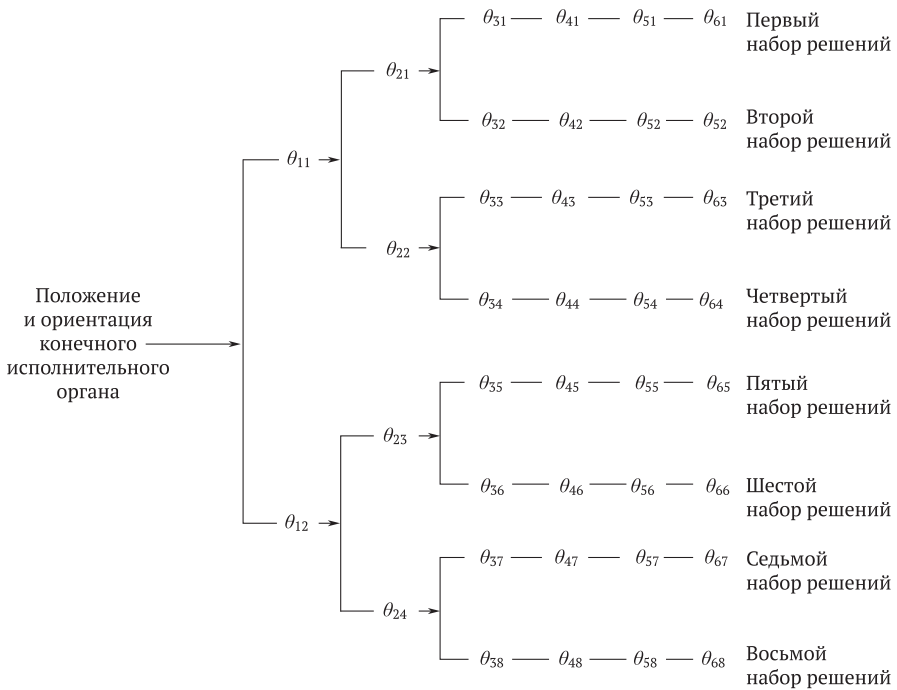


Рис. 2.9 ❖ Логическая схема получения обратных решений

2.4.4. Процесс реализации эвристического послыонного итеративного метода

Итеративный алгоритм обратной кинематики с эвристической сегментацией в основном включает: оценку обратной задачи на основе метода C-FABRIK, декомпозицию уравнений обратной кинематики на основе аналитического подхода, а также численную итерационную оптимизацию. В данной работе представлены полная теоретическая схема и реализация итеративного алгоритма обратной кинематики с эвристической сегментацией, как показано на рис. 2.10 и в алгоритме 2.1.

Эвристический сегментированный итеративный алгоритм обратной кинематики принимает в качестве входных данных целевую позу рабочего органа (матрицу положения $\mathbf{P}_{3 \times 1}$ и матрицу ориентации $\mathbf{R}_{3 \times 3}$) и в качестве выходных

данных получает решение обратной кинематики манипулятора, состоящее из набора углов сочленений $(\theta_1^i, \theta_2^i, \theta_3^i, \theta_4^i, \theta_5^i, \theta_6^i)$, $i = 1, 2, \dots, 8$ – индекс выходных решений. После запуска алгоритма на первом уровне, основанном на методе C-FABRIK, быстро вычисляются два приближенных решения для первого сочленения θ_1 и θ_1' , которые используются в качестве начальных значений для итераций второго уровня. Хотя на втором уровне для вычисления решений, связанных с последующими сочленениями, применяется аналитический метод, данные наборы решений обратной кинематики основаны на приближенных значениях первого сочленения. Поэтому требуется проверка полученных решений с использованием прямой кинематики для обеспечения выполнения требований по теоретической точности. Когда ошибки положения и ориентации конца исполнительного органа ε_c и γ_c удовлетворяют заданным условиям сходимости, алгоритм итеративно завершается, и соответствующее решение принимается в качестве действительного решения обратной кинематики манипулятора. В противном случае, если приближенные решения θ_1 или θ_1' недействительны, шаг изменения угла α постепенно увеличивается в обе стороны для повторного вычисления решений, пока в пределах заданной области поиска не будет найдено допустимое решение, удовлетворяющее требованиям по точности. Из восьми наборов решений обратной кинематики отбирается единственное решение, удовлетворяющее ограничениям по сочленениям и критерию минимального перемещения сочленений, которое используется для управления движением манипулятора.

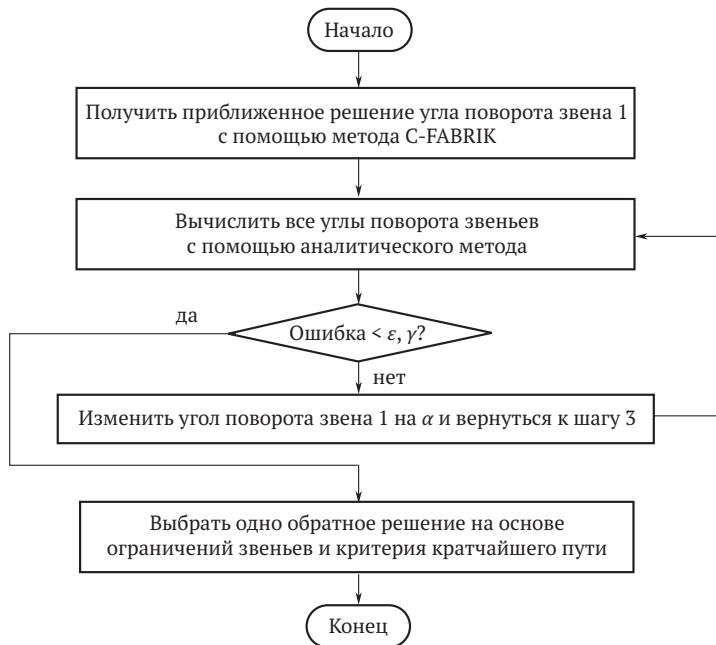


Рис. 2.10 ❖ Блок-схема эвристического сегментированного итеративного метода обратной кинематики

Алгоритм 2.1. Эвристический сегментированный итеративный алгоритм обратной кинематики

Входные данные: целевая поза конца исполнительного органа манипулятора.

Выходные данные: 8 наборов решений $(\theta_1^i, \theta_2^i, \theta_3^i, \theta_4^i, \theta_5^i, \theta_6^i), i = 1, 2, \dots, 8$.

```

1  % Первая итерация – метод C-FABRIK
2  % Вычисление двух приближенных значений для сустава 1:  $\theta_1, \theta_1'$ 
3   $\psi = [\theta_1, \theta_1']$ 
4  % Вычисление всех углов суставов
5  for j = 1 : 2
6   $\theta_1^c = \psi(j)$ 
7  dataset_up =  $\theta_1^c : \alpha : \theta_1^c + \sigma_1$ 
8  dataset_down =  $\theta_1^c : -\alpha : \theta_1^c - \sigma_2$ 
9  n = size(dataset_up)
10 for k = 1:n
11  $\theta_1^s = \text{dataset\_up}(k)$ 
12 % Вычисление обратного решения аналитическим методом
13 Res(j)  $\leftarrow (\theta_1^i, \theta_2^i, \theta_3^i, \theta_4^i, \theta_5^i, \theta_6^i), i = 1, 2, \dots, 4$ 
14  $E_p, E_o \leftarrow$  Вычисление ошибки по позиции и ориентации
15 if  $E_p \leq \varepsilon \ \& \ E_o \leq \gamma == 1$ 
16   Return Res(j)
17   Break
18 End
19 End
20 if Res(j) is not empty
21   for h = 1:n
22      $\theta_1^s = \text{dataset\_down}(h)$ 
23     Res(j)  $\leftarrow (\theta_1^i, \theta_2^i, \theta_3^i, \theta_4^i, \theta_5^i, \theta_6^i), i = 1, 2, \dots, 4$ 
24      $E_p, E_o \leftarrow$  Вычисление ошибки по позиции и ориентации
25     if  $E_p \leq \varepsilon \ \& \ E_o \leq \gamma == 1$ 
26       Return Res(j)
27       Break
28     End
29   End
30 End
31 End

```

2.4.5. Выбор избыточных решений обратной задачи

Выбор избыточных решений на основе ограничений по положениям сочленений манипулятора и критерия минимального перемещения может быть преобразован в задачу оптимизации. Посредством вычисления оптимального значения заданной целевой функции определяется единственное решение обратной кинематики манипулятора. Таким образом, задача оптимизации формулируется следующим образом:

$$\begin{cases} \text{minimize } f(\theta_k^i) = \sqrt{\sum_{k=1}^6 \omega_k (\theta_k^i - \theta_k)^2}, & i = 1, 2, \dots, n, \quad k = 1, 2, \dots, 6 \\ \text{при условии, что } \theta_k^i \in [\theta_{k,\min}^i, \theta_{k,\max}^i] \end{cases} \quad (2.36)$$

Здесь θ_k^i обозначает угол k -го сочленения i -го избыточного решения манипулятора; $\theta_k^i \in [\theta_{k,\min}^i, \theta_{k,\max}^i]$ – допустимый диапазон углов k -го сочленения; θ_k – текущий угол соответствующего сочленения манипулятора; w_k – весовой коэффициент, отражающий отношение между энергопотреблением привода сочленения и общей механической работой. Функция $f(\theta_k^i)$ представляет собой взвешенное евклидово расстояние между текущей конфигурацией и избыточным решением. В данном случае сначала отбирается n ($n \leq 8$) допустимых решений, удовлетворяющих ограничениям по манипулятору и сочленениям, после чего по формуле (2.36) определяется решение, наиболее близкое к текущему положению манипулятора и обладающее минимальными энергетическими затратами. Подробный процесс показан на рис. 2.11.

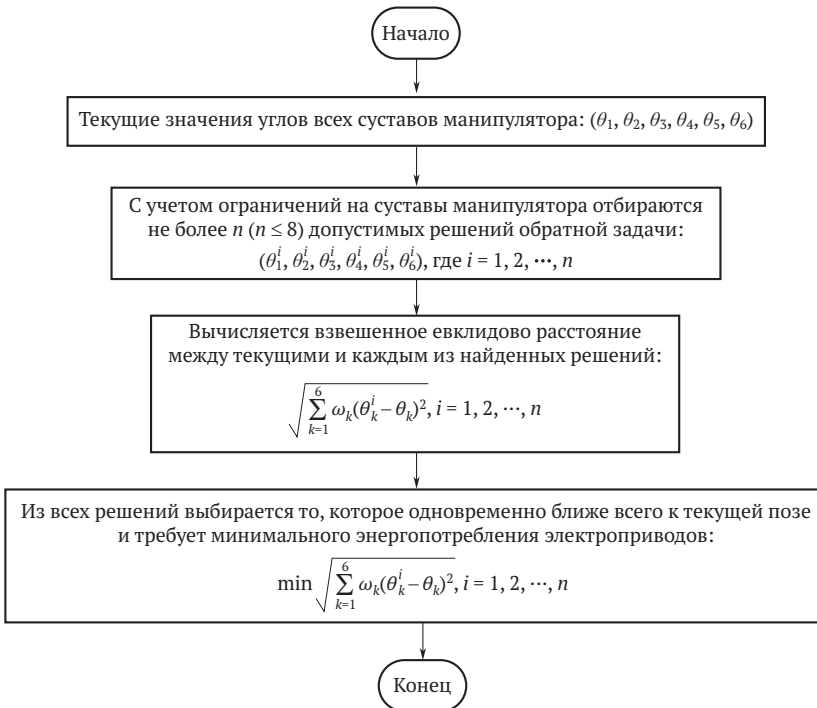


Рис. 2.11 ❖ Процесс выбора избыточного решения