

УДК 514.743
ББК 22.151.5
Г57

Го Хунъюй

Г57 Что такое тензоры? / пер. с англ. В. И. Бахура. – М.: ДМК Пресс, 2026. – 226 с.: ил.

ISBN 978-5-93700-444-4

Тензоры широко применяются в физике, информатике, инженерии, машинном обучении, интеллектуальном анализе данных, медицине и многих других областях, но при этом имеют запутанную и неоднозначную систему определений. Цель этой книги – разъяснить строгие определения тензора интуитивным способом, чтобы у студентов больше не возникала необходимость заучивать их наизусть.

Издание предназначено для аспирантов, студентов старших курсов, а также исследователей и специалистов в области физики и инженерии. Необходимым условием является базовое знание линейной алгебры.

УДК 514.743
ББК 22.151.5

All rights reserved. This book, or parts thereof, may not be reproduced in any form or by any means, electronic or mechanical, including photocopying, recording or any information storage and retrieval system now known or to be invented, without written permission from the Publisher. Russian translation arranged with World Scientific Publishing Co Pte Ltd, Singapore.

Все права защищены. Любая часть этой книги не может быть воспроизведена в какой бы то ни было форме и какими бы то ни было средствами без письменного разрешения владельцев авторских прав.

ISBN 978-981-124-101-7 (англ.)

ISBN 978-5-93700-444-4 (рус.)

Copyright © 2021 by World
Scientific Publishing Co. Pte. Ltd.

© Перевод, оформление, издание,
ДМК Пресс, 2026

Содержание

От издательства	10
Предисловие	11
Схема взаимосвязи глав	13
Обозначения	14
Глава 1. Сумбур: так что же такое тензоры?	15
§1. Вопросы и заблуждения	15
§2. Кто изобрел тензор?	18
§3. Различные определения тензора	20
§4. Простые вещи с вычурными названиями тензоров	29
§5. Тензоры без названия – линейные преобразования	34
§6. Сравнение: различные определения вектора – конкретные системы против абстрактных систем	35
§7. Тензорное произведение и тензорные пространства	37
§8. Степень, ранг, порядок или размерность – какое название лучше?	38
*§9. Что такое псевдоскаляры, псевдовекторы и псевдотензоры?	40
§10. Что такое тензорный анализ? Связь с геометрией Римана	42
10.1. Векторный анализ	42
10.2. Тензорный анализ и геометрия Римана	43
Глава 2. Почему и как используются тензоры в машинном обучении?	45
§1. Как AlphaGo победил лучшего игрока в го благодаря глубокому обучению	45
§2. Структура данных тензора	48
2.1. AlphaGo	49
2.2. Изображения и видео	50
2.3. Приложения для работы с речью и аудио	50
§3. TensorFlow и тензорный процессор (TPU)	51
§4. Тензор в машинном обучении – это дань моде?	52
Глава 3. Прямая сумма пространств $U \oplus V$	54
§1. Элементы	54
§2. Операции	54
§3. Размерность $U \oplus V$	55

Глава 4. Диадика Гиббса	56
§1. Что такое диада?	56
§2. Когда две диады равны?	57
§3. Какие операции допустимы с диадами?	57
§4. Что такое диадик?	57
§5. Какие операции допустимы с диадиками?	58
§6. Когда два диадика равны?	58
§7. Матричное представление	59
§8. Изменение координат	60
§9. Каково назначение диадиков? Линейные преобразования и билинейные формы.....	61
§10. Что такое диадическое сопоставление?.....	63
Глава 5. Тензорные пространства (тензорное произведение $U \otimes V$)	64
§1. Билинейные отображения	64
§2. Отличия: билинейное отображение и линейное отображение	67
§3. Мультилинейные отображения.....	71
§4. Тензорное произведение двух векторных пространств	71
§5. Декомпозируемые тензоры.....	80
§6. Тензорное произведение линейных отображений.....	81
§7. Тензорное произведение нескольких векторных пространств.....	81
§8. Векторные тензоры – наиболее обобщенная модель	82
Глава 6. Тензорные пространства (тензорная степень $V^{\otimes(p,q)}$)	84
§1. Тензорные пространства (тензорные степени пространства)	84
§2. Изменение базиса	85
§3. Индуцированное внутреннее произведение	87
§4. Понижение и повышение индексов – изоморфизмы	87
Глава 7. Тензорная алгебра	90
§1. Тензорное произведение тензоров	90
§2. Тензорная алгебра.....	91
§3. Свертывание тензоров	92
Глава 8. Динамика: тензор инерции	94
§1. Момент импульса	94
§2. Вращение твердого тела вокруг фиксированной точки.....	97
§3. Вращение твердого тела вокруг фиксированной оси	101
§4. Теорема о параллельных осях и теорема о перпендикулярных осях	106
§5. Эллипсоид тензора.....	107
Глава 9. Электродинамика: тензор электромагнитного поля	110
§1. Электродинамика в тензорной формулировке	110
§2. Электродинамика в рамках галилеева преобразования	112

2.1. Электромагнитное поле в виде контравариантного тензора $F^{\mu\nu}$	114
2.2. Электромагнитное поле в виде ковариантного тензора $F_{\mu\nu}$	116
2.3. Электромагнитное поле в виде сочетания $F^{\mu\nu}$ и $F_{\mu\nu}$	117
2.4. Электромагнитное поле в виде сочетания $F^{\mu\nu}$ и $F_{\mu\nu}$	118
§3. Электродинамика во вращающихся системах отсчета	119
*§4. Уравнения Максвелла в виде внешних дифференциальных форм	120
*§5. Предложение новой нотации $d\lambda$ для внешней производной	122

Глава 10. Геометрия Римана и общая теория относительности

§1. Что такое «искривленное пространство»?	127
1.1. Внешний вид изогнутых поверхностей и изогнутых пространств	128
1.2. Взгляд изнутри на искривленные поверхности по Гауссу	130
1.3. Обобщение Римана по внутренней геометрии	133
§2. Что такое касательное пространство?	135
2.1. Внешнее наблюдение упрощает задачу	135
2.2. Взгляд изнутри более сложен	137
§3. Повторное обращение к законам преобразования тензоров	139
§4. Дифференцируемое многообразие и риманово многообразие: в чем разница?	141
§5. Применимость геометрии Римана в реальном мире – традиционализм	145
§6. Что такое общая теория относительности?	153
§7. Что такое время?	166

Приложение 1. Основные положения линейной алгебры

§1. Доказательство коммутативности сложения	183
§2. Ковекторы и двойственное пространство	184
§3. Внутреннее произведение	186
§4. Контравариантные и ковариантные компоненты векторов	188
4.1. Контравариантные координаты как параллельные проекции	190
4.2. Ковариантные координаты как перпендикулярные проекции	191
§5. Билинейные формы и квадратичные формы	192
§6. Свободные векторные пространства и свободные алгебры	193
6.1. Интуитивная идея	193
6.2. Формальное определение свободного векторного пространства	194
6.3. Свободные алгебры	195

Приложение 2. Математические структуры

§1. Математические структуры	197
§2. Дискретные структуры	199
2.1. Алгебраические структуры	199
2.2. Порядковые структуры	200
§3. Непрерывные структуры	200
3.1. Топологические структуры	200

3.2. Структуры меры	200
§4. Смешанные структуры	201
Приложение 3. Аксиоматические системы	202
§1. Неопределенные концепции и аксиомы	202
§2. Аксиоматические системы – от античности до наших дней.....	204
§3. Согласованность, независимость и целостность.....	214
3.1. Согласованность.....	214
3.2. Независимость	216
3.3. Целостность	217
Библиография.....	219
Предметный указатель.....	222

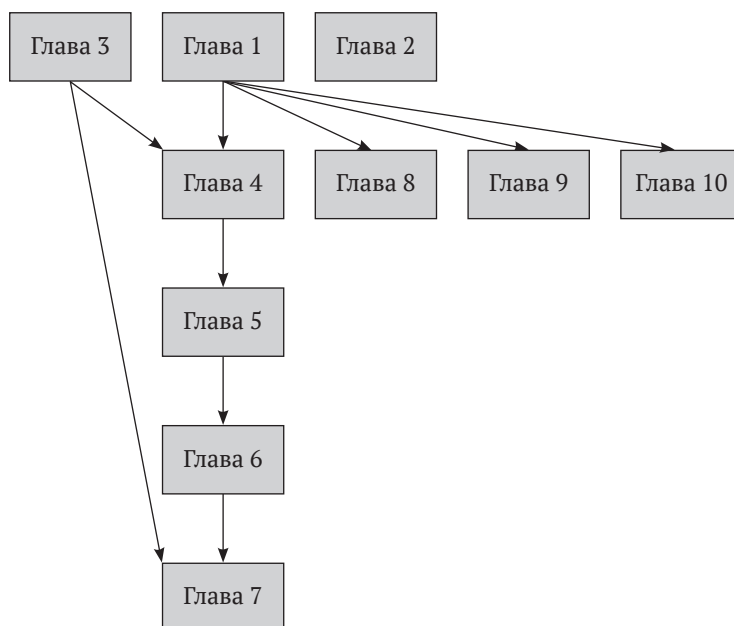
Предисловие

Тензоры имеют широкое применение в физике и инженерии. При определении тензора в классическом представлении с использованием компонентного подхода зачастую возникает некоторая неопределенность. Тензор определяется как матрица, но с учетом законов преобразования. Он описывается в категориях компонентов объекта, без четкого определения самой сущности этого объекта. Это порождает двойственное впечатление матрицы и нематрицы, подобно смешению живого и мертвого состояний кошки Шредингера. Особенно запутывает студентов сосуществование старых и новых определений в специализированной литературе. Эти определения выглядят настолько по-разному, что студенты с трудом могут представить, что речь идет об одном и том же. Традиционное определение сложно понять, потому что оно не является строгим; современные определения сложно понять, потому что они точны, но при этом более абстрактны и менее интуитивны. Цель этой книги – разъяснить строгие определения тензора интуитивным способом, чтобы у студентов больше не возникала необходимость заучивать эти определения как попугаям.

Эта книга предназначена для аспирантов, студентов старших курсов, а также исследователей и специалистов в области физики и инженерии. Книга также может быть полезна студентам, изучающим математику, для формирования более глубокого понимания тензоров на интуитивном уровне. Необходимым условием для изучения этой книги является базовое знание линейной алгебры. Некоторые концепции линейной алгебры рассматриваются непосредственно перед их использованием. Более сложные темы линейной алгебры, такие как ко векторы и двойственные пространства, контравариантные и ковариантные компоненты векторов, билинейные формы и квадратичные формы, представлены в приложении 1. Концепция математических структур, предлагаемая Бурбаки, очень полезна при изучении современной математики, включая тензоры и геометрию Римана. Читатели, незнакомые с этой концепцией, могут ознакомиться с ней в приложении 2.

Глава 1 представляет собой введение и обзор тензоров. Глава 3 – это короткий раздел о пространствах прямой суммы. Главы с 4 по 7 в основном посвящены тензорной алгебре. В главах 2, 8 и 9 рассматриваются прикладные аспекты в области машинного обучения и физики. В последней главе 10 представлен обзор геометрии Римана и общей теории относительности (см. схему взаимосвязи глав после оглавления). Более сложные темы, выходящие за рамки данной книги, отмечены звездочкой перед названием раздела. В рамках приведены замечания, которые отходят от основной логической линии темы, большинство из которых являются историческими примечаниями и собственными философскими взглядами автора.

Схема взаимосвязи глав



Глава 1

Сумбур: так что же такое тензоры?

Одним из способов узнать многое о математике является чтение первых глав из множества книг.

– Пол Р. Халмос

Тензоры широко применяются в физике, информатике, инженерии, машинном обучении, интеллектуальном анализе данных, медицине (диффузионная тензорная визуализация) и других областях. В этой главе представлен общий обзор тензоров. Вы можете столкнуться с использованием терминов, которым еще не были даны определения. Цель заключается в том, чтобы составить общее представление.

Если первая глава будет для вас полезна, может быть, стоит прочитать и последующие. Логическое изложение материала начинается в главе 3.

§1. Вопросы и заблуждения

Для многих студентов сама по себе концепция тензора является предметом непонимания. Поиск в интернете выдает множество запросов, связанных с тензорами. Например:

- Является ли тензор просто матрицей (высшего порядка)?
- Как давно существуют тензоры и почему они внезапно стали так востребованы в машинном обучении?
- Являются ли тензоры в машинном обучении тем же, что и тензоры в математике и физике?
- Являются ли тензоры в машинном обучении контравариантными или ковариантными? Что такое метрический тензор?
- Почему тензор инерции является тензором (в большинстве книг он определяется как матрица)?

- Что является примером величины, которая имеет нужное количество компонентов, но не является тензором?
- Какова связь между тензором и тензорным произведением? Каково физическое значение тензора?
- Можно ли сложить компоненты контравариантного тензора и ковариантного тензора?
- Интересуются ли математики-теоретики тензорным анализом? Какие открытые проблемы существуют в тензорном анализе?
- Имеет ли тензорный анализ отношение к глубокому обучению?

В интернете можно найти множество ответов и объяснений. Однако вместо раскрытия тайн многие из них только добавляют еще больше путаницы и без того запутанные умы студентов. Вот несколько таких примеров:

- «Тензор – это просто n -мерный массив с n индексами»;
- «Тензоры – это просто математические объекты, которые можно использовать для описания физических свойств»;
- «Тензоры – это обобщения скаляров и векторов»;
- «По сути, тензоры – это векторы, которые не имеют одного направления, а указывают во всех направлениях»;
- «Если я спрошу вас, что такое вектор, вы, возможно, ответите, что это элемент векторного пространства, так что тензор – это элемент тензорного пространства»;
- «Тензоры обладают свойствами как векторов, так и скаляров, такими как площадь, напряжение и т. д.»;
- «Тензор – это не скаляр, не вектор и не что-то еще. Это просто абстрактная величина, подчиняющаяся закону преобразования координат. Все, что удовлетворяет этому закону, является тензором. Вот и все!»;
- «В математике тензоры – это геометрические объекты, которые описывают линейные отношения между геометрическими, числовыми и другими тензорными векторами»;
- «Самый простой способ представить тензор – это вектор в пространстве произведения. Каждый индекс обозначает фактор пространства произведения, в котором находится тензор, и может быть повышен или понижен в зависимости от изменения соответствующего фактора при смене базиса. Количество индексов определяет порядок тензора. Таким образом, тензоры по сути являются просто обобщением векторов. Их компоненты (в определенном базисе) представляют собой многомерные массивы. Тензор – это больше, чем просто многомерный массив, по той же причине, по которой вектор – это не просто список его компонентов»;
- «Говоря не совсем техническим языком, тензоры представляют собой линейный оператор других тензоров. Каждый раз, когда вы применяете тензор к другому тензору, пропадает набор совпадающих индексов»;
- «Тензор – это многолинейная функция»;

- «Тензор со множеством индексов, как ковариантных, так и контравариантных, выглядит как многомерные данные в 0, 1, 2, 3 и более высоких измерениях»;
- «В простейшей форме: величины, имеющие величину, направление и плоскость действия, называются тензорными величинами»;
- «Тензор – это элемент тензорного произведения двух или более векторных пространств»;
- «Тензор – это тензорное произведение двух векторов»;
- «Тензор – это те физические величины, которые могут иметь эффекты, подобные напряжению».

Каждое из этих определений содержит долю правды о тензорах, но в них также отражено множество противоречий. Это напоминает мне забавные ответы маленьких детей на вопрос «Что такое любовь?».

Сравнение: что общего между любовью и тензором?

«Что такое любовь?»

- «Любовь – это когда девочка наносит духи, а мальчик – одеколон после бритья и они выходят на улицу и нюхают друг друга» (5 лет).
- «Любовь – это когда ты говоришь парню, что тебе нравится его рубашка, и он носит ее каждый день» (7 лет).
- «Если ты хочешь научиться лучше любить, начни с друга, которого ты ненавидишь» (6 лет).
- «Любовь – это когда мама видит папу потного и пахнущего, но все равно говорит, что он красивее Роберта Редфорда» (8 лет).
- «Любовь – это когда твой щенок лижет тебе лицо, даже если ты оставил его одного на целый день» (4 года).
- «Любовь – это когда вы целуетесь все время. А когда вы устаете целоваться, вы все равно хотите быть вместе и больше разговариваете» (8 лет).
- «Я знаю, что моя старшая сестра любит меня, потому что она отдает мне всю свою старую одежду и вынуждена покупать новую» (4 года).
- «Я позволяю старшей сестре дразнить меня, потому что мама говорит, что она дразнит меня только потому, что любит меня. Поэтому я дразню свою младшую сестру, потому что люблю ее» (4 года).

Каждый из этих ответов, безусловно, отражает какой-то аспект правды.

Что общего между любовью и тензором? Любовь между сестрами такая же, как между мамой и папой, между подростками, которые встречаются, и между собаками и людьми? Сравните с вопросом: тензор в машинном обучении такой же, как в математике и физике?

Понятие любви абстрактно и сложно, и оно никогда не поддавалось строгому определению. Тензор также абстрактен и сложен. В прошлом он не был четко определен. Существуют строгие современные определения, но они более абстрактны и менее интуитивны. Таким образом, старое определение трудно понять, потому что оно не является строгим; современное определение трудно понять, потому что оно является строгим. Цель этой книги – объяснить строгие определения тензора в интуитивной форме, чтобы студентам больше не приходилось заучивать эти определения как попугаам.

Ответы на эти вопросы будут даны в нашей книге. После прочтения книги читатель сможет самостоятельно оценить достоверность приведенных выше ответов. Однако перед тем, как приступить к чтению книги, большинство читателей хотели бы получить краткие ответы на эти вопросы. Именно для этой цели и предназначена данная глава.

§2. Кто изобрел тензор?

В этом разделе приведена краткая история концепции тензора. Это позволяет ответить на вопрос, как давно появились тензоры. Также дается ответ на вопрос «почему тензоры вызывают путаницу» с определенной точки зрения: они имеют разное происхождение и представляют собой слияние различных исторических направлений. В следующем разделе приводится ответ на этот вопрос с другой точки зрения: в современной литературе существует много, казалось бы, разных определений тензора.

В конце 1800-х и начале 1900-х годов в развитии теории тензоров было несколько направлений, представленных Риччи, Гиббсом, Фойгтом и Уитни. Большинство современных авторов приписывают концепцию тензора Риччи, поскольку ранние учебники, особенно по физике, в основном следовали его определениям. Риччи не использовал в своем определении термин «тензор» (tensor), заменив его словом «система» (system). В физике термин «тензор» используется в определении Риччи. Хотя это и называют «тензором», определение Риччи на самом деле описывает тензорное поле. Это вызывает наибольшую путаницу у новых исследователей. Гиббс, Фойгт и Уитни давали определение тензора в алгебраическом контексте.

1. Г. Риччи (G. Ricci) [(1892)]: ковариантные и контравариантные системы, но он называл их «системами», а не «тензорами» (то, что он определил, является тензорным полем в современном смысле; подробнее см. в разделе 3).
2. Дж. У. Гиббс (J. W. Gibbs) [(1884)]: диадики и полиадики (на самом деле это тензоры в современном смысле, только носят другие названия; подробнее см. в главе 4).
3. В. Фойгт (W. Voigt) [(1898)]: придумал название «тензор» – в более узком смысле симметричных тензоров для изучения упругости кристаллов.
4. Х. Уитни (H. Whitney) [(1937)]: тензорное произведение (подробнее см. в главе 5).

Гиббс признан одним из основателей векторной алгебры и векторного анализа. Он сыграл важную роль в отделении векторов от кватернионов Гамильтона. Однако его значительный вклад в развитие тензорной алгебры и тензорного анализа (в евклидовом пространстве) зачастую остается недооцененным. Гиббс разработал концепцию диадики и полиадики.

На самом деле это тензоры в их современном понимании, только с другими названиями¹. Его диадическое произведение – это именно тензорное произведение в современном понимании, за исключением того, что его обозначение представляет собой сопоставление двух векторов uv , в отличие от современного обозначения $u \otimes v$.

В. Фойгт [(1898)] ввел термин «тензор» в своем исследовании напряжений и деформаций кристаллов в книге «*Фундаментальные физические свойства кристаллов*» (*Die fundamentalen physikalischen Eigenschaften der Krystallen*). Слово «тензор» происходит от латинского «*tensus*», что означает «растяжение» или «напряжение». Тензоры напряжений и деформаций являются симметричными тензорами второго порядка и имеют по шесть компонентов. Фойгт описывает их в виде 6-мерного вектора. Такая запись известна как нотация Фойгта (*Voigt notation*). Термин «тензор» был принят физиками Максом Абрахамом (*Max Abraham*, 1904), Арнольдом Зоммерфельдом (*Arnold Sommerfeld*, 1910) и Максом фон Лауэ (*Max von Laue*, 1911). Эйнштейн (*Einstein*) и Гроссман (*Grossmann*) [(1913)]² использовали определение Риччи, но с названием «тензор» вместо термина «система», предложенного Риччи.

Уитни [(1937)] дал определение тензорному произведению. Фактически это более точная формулировка концепции диадиков Гиббса. Существуют и другие направления, связанные с развитием тензоров. Грассман разработал внешнюю алгебру в 1862 году. Хотя внешняя алгебра может быть построена независимо от теории тензоров, между ними все же существует связь. Внешний вектор фактически является антисимметричным тензором. Х. Минковский (*H. Minkowski*) [(1908)] впервые ввел концепцию электромагнитного тензора, который является антисимметричным тензором, хотя он назвал его «вектором второго рода» (6-мерным, чтобы отличить его от «вектора первого рода» с 4 измерениями). Позже А. Зоммерфельд (*A. Sommerfeld*) назвал его 6-мерным вектором. Сравним его с тензором силы напряжения Фойгта, который также выражается как 6-мерный вектор. Тензор Фойгта является симметричным тензором над трехмерным векторным пространством, в то время как тензор электромагнитного поля является антисимметричным тензором над четырехмерным векторным пространством.

Тензор электромагнитного поля обсуждается в главе 9.

¹ Термин «тензор» действительно встречался в книге Гиббса, но использовался для обозначения особого типа тензоров (а именно особого типа линейных преобразований). У. Р. Гамильтон также использовал термин «тензор», но в значении модуля кватерниона, что совершенно не связано с нашей теорией тензоров. Термин «тензор» в понимании Гамильтона сегодня больше не используется. Вместо него используется термин «модуль» или «норма кватерниона».

² Эта статья состоит из двух частей: Эйнштейн является единственным автором части, посвященной физике, а Гроссман – единственным автором части, посвященной математике.

Философский взгляд: математика изобретена или открыта?

– Мнение автора: и то, и другое.

Мы поставили вопрос «кто изобрел тензор». Тензор был изобретен или открыт? Существует вековая философская проблема: «математика изобретена или открыта»?

Мы задаемся вопросом «что такое тензор». На самом деле тензор – это то, как мы его определяем. Мы действительно имеем право свободно давать определения. И в этом смысле математика является изобретением. Шерман Стейн (Sherman Stein) [(2010)] написал книгу «Математика: рукотворная вселенная» (*Mathematics: the Man-made Universe*). И именно эту точку зрения отражает название его книги. Конечно, другие люди утверждают, что математика – это научное открытие, и эта тема до сих пор остается предметом горячих споров.

Мнение автора: и то, и другое. В математике мы сначала изобретаем эту рукотворную вселенную. Затем мы делаем открытия внутри нее. Эта рукотворная вселенная может быть чрезвычайно сложной, и открытия в ней отнюдь не являются чем-то обыденным. Например, создание неевклидовой геометрии является изобретением, но ее интерпретации (или модели) являются открытиями, которые раскрывают связь между неевклидовой и евклидовой геометриями. Возьмем группу в качестве другого примера. Определение группы занимает всего несколько строк текста, что можно рассматривать как изобретение. Кульминационный результат в теории групп, классификация конечных простых групп, является открытием, о котором написаны десятки тысяч страниц в нескольких сотнях статей, созданных более чем 100 авторами и опубликованных в основном в период с 1955 по 2004 год. Еще одним примером может служить риманово многообразие. Его определение также состоит всего из нескольких строк текста. Теорема вложения Нэша – это великое открытие, которое показывает, что хотя риманово многообразие определено само по себе, оно всегда изоморфно некоторому подмногообразию, вложенному в евклидово пространство более высокой размерности.

Я интерпретировал открытие как открытие в рукотворной вселенной самой математики. Является ли математика открытием в природе? Мой ответ – да и нет: нет в том смысле, что современная математика в своей абстрактной форме освобождена от обязанности открывать истину в природе, но да в том смысле, что математика может быть частью процесса открытия природы, когда она применяется в науке. В прошлом задача математики заключалась в непосредственном открытии истины в природе, но в наши дни ее участие в открытии является косвенным. Абстрактная математика может быть применена к реальному миру, если мы найдем физическую модель абстрактной математической структуры (см. приложение 2).

§3. Различные определения тензора

Почему концепция тензора вызывает путаницу? Это же просто определение, не так ли? Подумайте об определении равностороннего треугольника. Ни у кого не возникнет трудностей с этим.

Понимание концепции могут затруднять некоторые факторы:

1. Сама концепция является достаточно сложной.

2. Само определение не является достаточно точным. Зачастую отсутствие строгости в определении вызвано внутренней сложностью самой концепции. Исторически первые попытки определить концепцию нередко не приводили к успеху в выявлении ее сущности. Могут потребоваться столетия, чтобы концепция эволюционировала и кристаллизовалась. Математика изобилует примерами эволюции таких концепций: комплексные числа, действительные числа, предел, непрерывность, векторы... и этот список можно продолжать до бесконечности (см. вставки в конце раздела).
3. В литературе сосуществуют разные определения, что также обусловлено историческими причинами. Некоторые из этих определений эквивалентны, но не все.

Получается, что все эти факторы влияют на понимание концепции тензора. Они вызывают у начинающих множество неясностей. Ниже приводится несколько определений тензоров, которые можно найти в учебниках. Не переживайте, если они сбивают вас с толку. Это всего лишь показывает, что у вас есть веская причина для этого, и в этом нет вашей вины.

Определения 1 и 2 чаще всего встречаются в старых учебниках по тензорному анализу, физике и особенно общей теории относительности.

Определение 1. Множество величин ξ^{rs} называется **контравариантным тензором** (степени 2), если при смене координат

$$x'^i = x'^i(x^1, \dots, x^n), \quad i = 1, \dots, n, \quad (1.1)$$

они преобразуются согласно

$$(\xi')^{st} = \sum_{\sigma, \tau} \xi^{\sigma\tau} \frac{\partial x'^s}{\partial x^\sigma} \frac{\partial x'^t}{\partial x^\tau}. \quad (1.2)$$

Множество величин ξ_{lm} называется **ковариантным тензором** (covariant tensor), если они преобразуются в соответствии с

$$(\xi')_{lm} = \sum_{\lambda, \mu} \xi_{\lambda\mu} \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^l} \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^m}. \quad (1.3)$$

Множество величин ξ_i^s называется **смешанным тензором** (mixed tensor), если они преобразуются в соответствии с

$$(\xi')_i^s = \sum_{\lambda, \sigma} \xi_\lambda^\sigma \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^i} \frac{\partial x'^s}{\partial x^\sigma}. \quad (1.4)$$

Примечание. Это определение основывается на работах Риччи. Смущает то, что в большинстве книг эти тензоры называются тензорами, но на самом деле Риччи описывает здесь тензорные поля. Не следует винить Риччи за то, что он

назвал их «системами». Именно использование названия «тензор» [Einstein and Grossmann (1913)] приводит к путанице между тензорами и тензорными полями. Каждая «величина» или компонента ξ^{rs} на самом деле является функцией пространственных координат $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$. Если множество величин рассматривается как единый тензор ξ , то Риччи определяет тензорное поле $\xi(\mathbf{x})$, которое представляет собой присвоение тензора ξ каждой точке пространства \mathbf{x} . Тензор ξ должен быть единой алгебраической сущностью. В логическом плане тензор как алгебраическая сущность должен быть определен в первую очередь, до определения тензорного поля, но Риччи этого не сделал. Это и есть причина, по которой Риччи использовал компоненты в своем определении, но с поправками, внесенными законами преобразования координат. С позиций современной науки эти законы преобразования не являются необходимыми. Они являются следствием изменения базиса в касательном пространстве дифференцируемого многообразия, вызванного локальным изменением координат (см. уравнение 10.10 в разделе 3 главы 10).

Произвольное преобразование координат в уравнении 10.10 и использование частных производных в приведенном выше определении явно указывают на тензорное поле. Чтобы сделать определение тензора более алгебраическим, общее преобразование координат в уравнении 10.10 ограничивается линейными преобразованиями. Это приводит к следующему упрощенному варианту определения.

Определение 2. Множество величин ξ^{rs} называется **контравариантным тензором** (степени 2), если при изменении координат

$$x'^i = \sum_k \Lambda_k^i x^k \quad (1.5)$$

и его инверсии

$$x^k = \sum_i \bar{\Lambda}_i^k x'^i, \quad (1.6)$$

где постоянные коэффициенты Λ_k^i и $\bar{\Lambda}_i^k$ удовлетворяют

$$\sum_i \Lambda_i^r \bar{\Lambda}_i^k = \delta_r^k, \quad (1.7)$$

они преобразуются согласно

$$(\xi')^{st} = \sum_{\sigma, \tau} \xi^{\sigma\tau} \Lambda_\sigma^s \Lambda_\tau^t. \quad (1.8)$$

Множество величин ξ_{lm} называется **ковариантным тензором**, если они преобразуются согласно

$$(\xi')_{lm} = \sum_{\lambda, \mu} \xi_{\lambda\mu} \bar{\Lambda}_l^\lambda \bar{\Lambda}_m^\mu. \quad (1.9)$$

Множество величин ξ_i^s называется **смешанным тензором**, если они преобразуются согласно

$$(\xi')_i^s = \sum_{\lambda, \sigma} \xi_\lambda^\sigma \bar{\Lambda}_i^\lambda \Lambda_\sigma^s. \quad (1.10)$$

Примечание. Хотя эта версия выглядит более алгебраической, значение линейного преобразования координат уравнения 1.5 по-прежнему не ясно, если множество величин является отдельным тензором, а не тензорным полем. Кроме того, значения терминов «контравариантный» и «ковариантный» не очевидны. Согласно работе К. Reich [(1994)], термины «ковариантный» и «контравариантный» были введены в 1851 году Дж. Сильвестром [Sylvester (1851)]. Этот факт будет раскрыт в разделе 2 главы 6: эти изменения координат относятся к изменению базиса базисного векторного пространства, которое включает матрицу A_i^k . Уравнение 1.7 показывает, что $\bar{\Lambda}_i^k$ является транспонированной матрицей обратной матрицы Λ_i^k . Матрица $\bar{\Lambda}_i^k$ здесь такая же, как A_i^k в разделе 2 главы 6. Вот почему преобразование ковариантного тензора включает $\bar{\Lambda}_i^k$, что означает «такое же, как» или «вместе с» преобразованием базиса, в то время как контравариантный тензор включает Λ_i^k , которое является обратной матрицей A_i^k со значением «против». Мы можем назвать преобразование базиса «прямым» преобразованием, а его обратное – «обратным» преобразованием. Если базис подвергается прямому преобразованию, координаты подвергаются «обратному» преобразованию, как в уравнении 1.5, по аналогии: если поезд движется вперед, деревья снаружи кажутся движущимися в обратном направлении с точки зрения человека, находящегося внутри поезда. Таким образом, преобразование для контравариантных тензоров действительно является «контра» к преобразованию базиса, что здесь не указано явным образом. Оно, скорее, «сопровождает» преобразование координат векторов уравнения 1.5. Само уравнение 1.5 считается «контра» или «обратным» по отношению к преобразованию базиса. Еще одно предупреждение для начинающих – это популярная в литературе нотация компонентов тензора. Хотя $\bar{\Lambda}$ выглядит похоже на Λ , на самом деле это транспонированная обратная матрица Λ . При этом g^{ij} – это компоненты обратной матрицы метрической матрицы g_{ij} .

Такое определение тензора нередко называют устаревшим. Именно этот компонентный подход и стал причиной возникновения парадокса, в котором концепция тензора представлена как неоднозначная двойственность матрицы и нематрицы, подобно сочетанию живого и мертвого состояний кота из парадокса Шредингера. Тензор определяется как матрица, но с поправкой на законы преобразования. Он определяется как компоненты объекта, без четкого определения сущности этого объекта.

В последние годы, на фоне бурного развития исследований в области машинного обучения, сообщество специалистов в этой области использует тензор в простом смысле многомерного массива (или матрицы более высокой

размерности), игнорируя законы преобразования и преодолевая эту неоднозначную двойственность. Тензоры в машинном обучении будут рассмотрены в главе 2.

Определение 3 (в контексте машинного обучения). Тензор – это многомерный массив (или матрица).

В новейших учебниках по физике наблюдается тенденция к использованию следующего определения тензора.

Определение 4. Пусть V – это векторное пространство над \mathbb{R} и V^* – это его двойственное пространство. Многолинейное отображение

$$\Phi : \underbrace{V^* \times \dots \times V^*}_p \times \underbrace{V \times \dots \times V}_q \rightarrow \mathbb{R}$$

именуется тензором типа (p, q) .

Примечание. У любознательного студента возникнет естественный вопрос. Почему в этом определении кодомен многолинейного отображения Φ должен быть множеством действительных чисел \mathbb{R} ? Можно ли заменить \mathbb{R} каким-либо другим векторным пространством? Является ли многолинейное отображение $\Psi : V \times \dots \times V \rightarrow V$ тензором? В частности, является ли линейное преобразование $\varphi : V \rightarrow V$ тензором?

Ответ на эти вопросы таков: это определение является лишь моделью тензоров. Кошка – это пример (модель) животных, но не все животные являются кошками. Существуют и другие модели тензоров, которые не включены в это определение. В дальнейшем мы увидим (см. раздел 8 главы 5), что многолинейное отображение $\Psi : V \times \dots \times V \rightarrow V$ действительно является векторным тензором. В частности, линейное преобразование $\varphi : V \rightarrow V$ является тензором. Квадратичная форма $\phi : V \rightarrow \mathbb{R}$ также является тензором (квадратичные формы тесно связаны с билинейными формами; см. приложение 1).

Ниже дается определение тензорного пространства (тензорного произведения пространств). В этом случае элемент этого пространства называется тензором. Это абстрактный подход, который мы будем использовать в основной части этой книги (см. главу 5).

Определение 5 (тензорное произведение пространств). Пусть U, V и W – это векторные пространства, при этом $\otimes : U \times V \rightarrow W$ – это билинейное отображение. Пара (W, \otimes) называется *тензорным произведением пространств* (tensor product space) или просто *тензорным пространством* (tensor space) над базисными векторными пространствами U и V , если они удовлетворяют следующим условиям:

1. Свойство генерации

$$W = \langle \text{Im } \otimes \rangle;$$

2. Свойство максимальной оболочки

$$\dim W = \dim U \cdot \dim V.$$

Векторы в W называются *тензорами* над U и V . Отображение \otimes называется *тензорным умножением* двух векторов, или *тензорным произведением*, или просто *тензорным произведением отображения*, или *тензорным отображением*. W нередко обозначается как $U \otimes V$.

Примечание. Законы изменения координат в традиционном определении являются лишь явлениями. Сущность тензоров заключается в многолинейности, или многолинейных отображениях. Законы изменения координат являются следствиями многолинейного отображения – тензорного произведения. Исторически многолинейность была осмыслена Гиббсом и Риччи, но не была выделена явным образом.

Следующее определение чаще всего встречается в учебниках по теоретической математике.

Определение 6. Пусть U, V и W – это векторные пространства, и предположим, что $\otimes : U \times V \rightarrow W$ – это билинейное отображение. (W, \otimes) называется *тензорным произведением пространств U и V* , если выполняются следующие условия (свойство однозначного разложения):

Для любого векторного пространства X и любого билинейного отображения $\Psi : U \times V \rightarrow X$ существует *единственное* линейное отображение $\varphi : W \rightarrow X$, такое что

$$\Psi = \varphi \circ \otimes.$$

Примечание. Некоторые авторы предпочитают именно это определение, поскольку оно лаконично и применимо не только к конечным пространствам U и V , но и к векторным пространствам бесконечной размерности. С образовательной точки зрения для начинающих это определение нельзя считать удачным. Мы будем рассматривать его как теорему об универсальном свойстве после определения тензорного произведения пространств альтернативным способом.

Следующее определение основано на конструкции (см. *Encyclopedic Dictionary of Mathematics* [Mathematical Society of Japan (1993)]; см. также [Bourbaki (1942); Roman (2005)]). Оно описывает понятные на интуитивном уровне идеи диадиков Гиббса, но сформулировано строгим современным абстрактным языком.

Определение 7. Пусть U и V – это векторные пространства над одним и тем же полем F . Пусть $\mathcal{V}_F(U \times V)$ – это свободное векторное пространство, порожденное $U \times V$. Пусть Z – это подпространство $\mathcal{V}_F(U \times V)$, порожденное всеми элементами вида

$$a(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}) + b(\mathbf{u}_2, \mathbf{v}) - (a\mathbf{u}_1 + b\mathbf{u}_2, \mathbf{v}),$$

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}_1) + b(\mathbf{u}, \mathbf{v}_2) - (\mathbf{u}, a\mathbf{v}_1 + b\mathbf{v}_2),$$

для всех $a, b \in F$, $\mathbf{u}, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in U$ и $\mathbf{v}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V$.

Фактор-пространство (quotient space)

$$U \otimes V = \frac{\mathcal{V}_F(U \times V)}{Z}$$

именуется *тензорным произведением* U и V . Элементы $U \otimes V$ именуются *тензорами* над U и V .

Определим отображение $\otimes : U \times V \rightarrow U \otimes V$ таким образом, что для всех $\mathbf{u} \in U$ и $\mathbf{v} \in V$, $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \mapsto \mathbf{u} \otimes \mathbf{v} \stackrel{\text{def}}{=} [(u, v)]$, где $[(\mathbf{u}, \mathbf{v})]$ – это класс эквивалентности (\mathbf{u}, \mathbf{v}) в $\mathcal{V}_F(U \times V)$, определенный подпространством Z . Это отображение является билинейным и называется *каноническим билинейным отображением*.

Мы перечислили множество различных определений тензора, которые чаще всего встречаются в учебниках. Все они не являются полностью равнозначными (хотя некоторые из них в некотором смысле равнозначны), но в целом они отражают историческую эволюцию концепции тензора.

Историческая справка: эволюция определений в математике

Многие математические концепции по своей природе сложны и не совсем понятны. Эти концепции не были кристально очевидны еще в момент их появления. У этих концепций есть своя эволюционная история, и их определения со временем уточнялись. Примеров тому множество: комплексные числа, иррациональные числа, действительные числа, векторы, длина, площадь, объем, вероятность, функция, непрерывная функция, дельта-функция Дирака, бесконечность, бесконечно малые величины, множество и т. д. Тензор – лишь один из примеров из этого списка. Бывали случаи, когда математик определял новую концепцию так, что даже его современники-математики испытывали трудности с ее пониманием. Возьмем, к примеру, внешнюю алгебру Грассмана. Генрих Балцер писал Августу Мёбиусу после прочтения книги Грассмана *Ausdehnungslehre* («Теория расширения»): «Сейчас я не могу вникнуть в эти мысли; когда я их читаю, у меня кружится голова и перед глазами появляется голубое небо». Мёбиус ответил: «Если, как вы пишете, вам не понравилась книга Грассмана *Ausdehnungslehre*, то я отвечу, что у меня такой же опыт. Я тоже смог прочитать не более двух первых страниц его книги».

Историческая справка: что такое векторы?

Концепция вектора также прошла долгий путь развития. Некоторые физические величины, такие как скорость и сила, имеют величину и направление. Закон параллелограмма сложения векторов был известен еще во времена Ньютона, но название «вектор» в те времена еще не использовалось. Название «вектор» было придумано Гамильтоном для обозначения мнимой части $bi + cj + dk$ его кватерниона $a + bi + cj + dk$. Именно Гиббс и Хевисайд освободили вектор от оков кватерниона и сделали его самостоятельным образованием. В то время векторы в основном ограничивались тремя измерениями. Вскоре это было обобщено на более высокие измерения, и вектор был определен как n -кортеж. Именно Пеано в 1888 году сформулировал абстрактное определение векторного пространства. Однако он не использовал название «векторное пространство» или «линейное пространство», а назвал его «линейной системой» (интересно сравнить это с историей тензоров. Риччи не использовал название «тензор», а вместо этого говорил о «системе»). Рассмотрим следующие определения вектора.

- (1) Вектор – это величина, имеющая размерность и направление.
- (2) Вектор – это n -кортеж чисел.
- (3) Вектор – это элемент векторного пространства.

Эти определения не являются полностью эквивалентными, но отражают историческую эволюцию концепции. Определение (2) дается в категориях компонентов. Определение (3) является абстрактным и аксиоматическим. Согласно определениям (2) и (3), величина вектора не определяется автоматически.

Старшеклассники обычно изучают (1) как определение вектора в курсе физики, а (2) как определение в курсе математики. Вполне вероятно, что у них возникнет вопрос: векторы в физике и математике – это одно и то же? Это недоразумение должно проясниться, когда они изучат абстрактное определение векторного пространства в университете, потому что (1) и (2) – это всего лишь модели абстрактных векторов.

История тензоров развивалась по схожему пути. В этой книге мы будем изучать абстрактное, или аксиоматическое, определение и соотносить с ним различные конкретные модели.

Историческая справка: что такое мнимые числа?

Типичное определение комплексного числа в школьных учебниках: комплексное число – это *число*, которое можно записать в виде $a + bi$, где a и b – действительные числа, а i – это мнимая единица, определяемая как $i^2 = -1$. Это определение принадлежит Джерому Кардану (Jerome Cardan), который сформулировал его в 1545 году без твердой логической основы. Затем в течение следующих трех столетий концепция продолжала развиваться, проходя через первоначальную путаницу и отрицание до окончательного прояснения и признания. Сам Кардан считал эти числа «мысленными мучениями» и «никчемностью». Декарт придумал термин «мнимый» и отверг его. Только Гаусс назвал их «комплексными числами», чтобы избавиться их от таинственности «мнимых» чисел. Даже Эйлер допустил ошибку, записав $\sqrt{-1}\sqrt{-4} = \sqrt{4} = 2$ в своей книге *Algebra*. Это парадоксальный аргумент, основанный

на применении $\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$ для получения $\sqrt{-1}\sqrt{-1} = \sqrt{(-1)(-1)} = 1$ (или аналогично $i^2 = (\sqrt{-1})^2 = \sqrt{(-1)^2} = 1$).

Геометрическое представление, предложенное Арганом, стало большим шагом к разгадке тайны мнимых чисел. Современное определение комплексного числа было дано Гамильтоном в 1837 году: комплексное число – это упорядоченная пара (a, b) действительных чисел. Число $(a, 0)$ отождествляется с действительным числом a , а i определяется как пара $(0, 1)$. Сложение и умножение комплексных чисел определяются следующим образом:

$$(a_1, b_1) + (a_2, b_2) \stackrel{\text{def}}{=} (a_1 + a_2, b_1 + b_2),$$

$$(a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) \stackrel{\text{def}}{=} (a_1 a_2 - b_1 b_2, a_1 b_2 + a_2 b_1).$$

Согласно этому определению, $i^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = -1$.

Историческая справка: что такое иррациональные числа?

Этот вопрос по своей сути аналогичен вопросу «что такое действительные числа?», поскольку иррациональное число можно определить в виде действительного числа, которое не является рациональным числом. Рациональные числа определить проще. Суть рационального числа заключается в соотношении двух целых чисел. Рациональное число можно определить в виде класса эквивалентности пары целых чисел. Для многих людей удивительно, что концепция действительных чисел гораздо сложнее, чем концепция комплексных чисел. С логической точки зрения, концепция действительных чисел должна предшествовать концепции комплексных чисел, поскольку комплексное число определяется как пара действительных чисел, но исторически строгое определение действительных чисел появилось гораздо позже, чем определение комплексных чисел. Понятие иррациональных чисел возникло из несоизмеримых отрезков античной греческой геометрии и интенсивно использовалось во времена раннего развития математического анализа без строгого определения. Строгие определения действительных чисел, такие как дедекиндово сечение и канторовская конструкция через последовательности Коши, окончательно сформировались лишь в XIX веке. В этом смысле комплексное число $\sqrt{-1}$ гораздо проще, чем $\sqrt{2}$, поскольку последнее включает в себя бесконечное множество.

Историческая справка: что такое множества?

Георг Кантор (Georg Cantor) считается основателем теории множеств, которая является фундаментом современной математики. Понятие множества как совокупности объектов является интуитивно понятным. Однако оно не является точным. Например, мы можем представить себе множество U , которое является множеством всех множеств. Поскольку U также является множеством, оно является элементом самого себя, то есть $U \in U$. Существуют и другие множества x со свойством $x \notin x$. Это приводит к парадоксу Рассела. Построим множество $Q \stackrel{\text{def}}{=} \{x | x \notin x\}$. Теперь зададимся вопросом: является ли Q элементом самого себя? То есть верно ли $Q \in Q$? Сначала предположим, что $Q \in Q$. Тогда Q не удовлетворяет свойству $x \notin x$, и, следовательно, $Q \notin Q$. Далее предположим, что $Q \notin Q$. Тогда Q удовлетворяет свойству $x \notin x$. Следовательно, $Q \in Q$. Популярной версией этого случая является парадокс парикмахера:

парикмахер в деревне, который является мужчиной, утверждает, что он бреет всех мужчин в деревне, которые не бреют себя, и не бреет тех, кто бреет себя. Теперь возникает вопрос: бреет ли парикмахер себя? Согласно его утверждению, он бреет себя тогда и только тогда, когда он не бреет себя.

Готтлоб Фреге (Gottlob Frege) из Германии сделал значительный вклад в развитие логики. Парадокс Рассела стал для него большим потрясением. Он впал в депрессию и после этого больше не занимался сколько-нибудь серьезной математикой. В отличие от физиков (см. раздел 6 главы 10; см. также [Guo (2021)]¹), математики относятся к парадоксам очень серьезно. Как же выйти из этого парадокса? На самом деле все довольно просто. Мы переопределяем понятие множества в более точном смысле, чтобы такие проблемные элементы, как U и Q , больше не квалифицировались как множества. Это не обычное определение. Квалификация регулируется набором аксиом, введенных Цермело и Френкелем. Эти аксиомы на самом деле являются скрытым определением множества (подробнее об аксиоматических системах см. в приложении 3).

§4. Простые вещи с вычурными названиями тензоров

Изрядное количество терминов содержит в себе слово «тензор», например метрический тензор, тензор кривизны, тензор инерции, тензор напряжений, диффузионная тензорная визуализация и т. д. Это всего лишь вычурные названия простых вещей, которые могут показаться пугающими для начинающих. Да, они являются тензорами, и называть их тензорами не является ошибкой, но теория тензоров не является обязательной для понимания этих концепций. Их можно называть и по-другому, без использования слова «тензор». Называть их тензорами – все равно что называть воду «монооксидом диводорода». Все понимают, что такое вода, но химический жаргон может ввести людей в заблуждение.

Эти термины были названы так исторически из-за того, что они (представлены) матрицами. Путаница коренится в вопросе, является ли тензор тем же, что и матрица. Если да, то почему бы нам просто не называть их метрической матрицей, матрицей инерции и так далее? Старомодное определение тензора содержит двусмысленность в отношении того, является ли тензор просто матрицей или нет. Тензор определяется как матрица компонентов, но неуклюже дополняется законами преобразования.

Современное представление проясняет эту ситуацию. Метрический тензор – это просто внутреннее произведение, тензор инерции можно определить в виде линейного преобразования или квадратичной формы. Тензор напряжений и тензор диффузии – это просто линейные преобразования.

¹ Guo, H. (2021). A New Paradox and the Reconciliation of Lorentz and Galilean Transformations, *Synthese*, <https://doi.org/10.1007/s11229-021-03155-y> (открытый доступ).

Более подробно тензор инерции будет рассмотрен в главе 8, а метрический тензор для римановой геометрии – в главе 10.

Представим силы напряжения в жидкостях и твердых телах. В жидкости выделим небольшой участок воображаемой поверхности, который разделяет жидкость с двух сторон. Каждая сторона оказывает силу на другую сторону (см. рис. 1.1а). Используем вектор \mathbf{S} для представления поверхности, где \mathbf{S} – это нормальный вектор поверхности, а величина \mathbf{S} представляет площадь поверхности. Пусть \mathbf{F} – это вектор, представляющий силу, которую жидкость на одной стороне оказывает на другую сторону. Поскольку жидкости не могут обладать сдвигающими силами, сила \mathbf{F} должна быть направлена в нормальном направлении к поверхности, которое совпадает с \mathbf{S} . При этом \mathbf{F} линейно связана с \mathbf{S} ,

$$\mathbf{F} = \sigma \mathbf{S}, \quad (1.11)$$

σ – это скалярный коэффициент, который называется давлением.

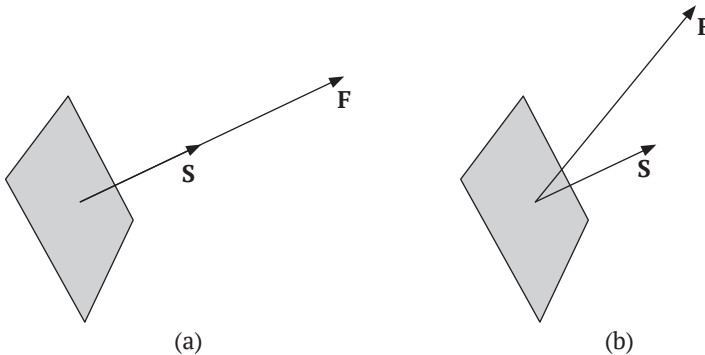


Рис. 1.1 ❖ (а) Напряжение в жидкостях; (б) напряжение в твердых телах

В твердых телах, таких как кристаллы, все обстоит иначе. Сила \mathbf{F} , как правило, не направлена в том же направлении, что и \mathbf{S} . При этом \mathbf{F} можно разложить на нормальное напряжение и сдвигающее напряжение (в направлении касательной к поверхности). Однако \mathbf{F} по-прежнему линейно связано с \mathbf{S} (см. рис. 1.1б). Эта зависимость является линейным преобразованием:

$$\mathbf{F} = \Sigma \mathbf{S}, \quad (1.12)$$

где Σ – это линейное преобразование, которое можно представить матрицей $[\Sigma]$ с компонентами σ_{ij} ,

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{bmatrix},$$

при этом Σ называется тензором напряжений. Его можно записать в виде

$$F_i = \sum_{j=1}^3 \sigma_{ij} S_j. \tag{1.13}$$

Матрица тензора напряжений Σ может быть представлена в виде трех вектор-столбцов

$$\sigma_1 = \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{21} \\ \sigma_{31} \end{bmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{bmatrix} \sigma_{12} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{32} \end{bmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{bmatrix} \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{33} \end{bmatrix}.$$

Каково физическое значение этих трех векторов? Представим, что у нас есть маленький куб. Его грани расположены вдоль трех осей с нормальными векторами $\mathbf{s}_1 = (1, 0, 0)$, $\mathbf{s}_2 = (0, 1, 0)$, $\mathbf{s}_3 = (0, 0, 1)$ и единичной площадью. Сила σ_1 – это напряжение, действующее на грань \mathbf{s}_1 , сила σ_2 – это напряжение, действующее на грань \mathbf{s}_2 , и так далее (см. рис. 1.2а). Каждая сила σ_i имеет три компоненты, и в совокупности матрица напряжений имеет девять компонентов. Каково физическое значение компонента σ_{ij} ? Величина σ_{ij} представляет собой i -ю компоненту σ_j , которая является силой, действующей на грань \mathbf{s}_j (ортогональную оси x_j). На грани \mathbf{s}_1 сила σ_{11} является нормальным напряжением, а силы σ_{21} и σ_{31} являются тангенциальными напряжениями. На грани \mathbf{s}_2 сила σ_{22} является нормальным напряжением, а силы σ_{12} и σ_{32} являются тангенциальными напряжениями (см. рис. 1.2).

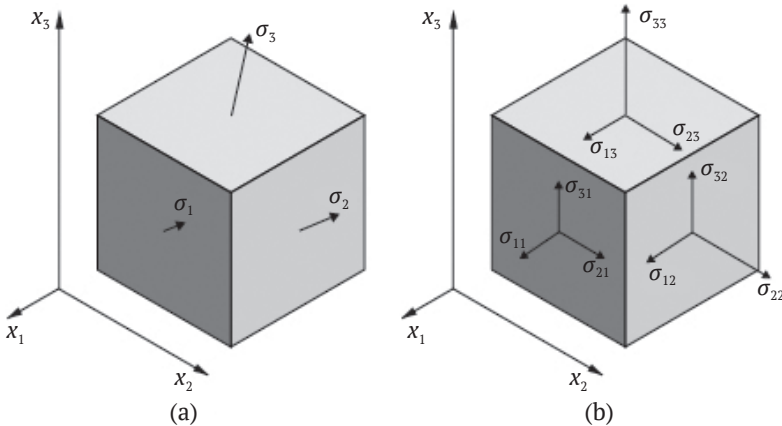


Рис. 1.2 ❖ (а) Тензор напряжений в виде трех векторов; (б) девять компонентов тензора напряжений

В действительности данный тензор является линейным преобразованием, а тензор напряжений Σ – лишь одним из примеров линейных преобразований, используемых в физике. Уравнение 1.13 представляет собой ком-

понентную форму любого линейного преобразования, не ограниченного только случаем напряжений. Линейное преобразование отображает любой вектор \mathbf{S} в новый вектор $\mathbf{F} = \Sigma \mathbf{S}$, как в уравнении 1.12. Значение его компоненты σ_{ij} является i -й компонентой \mathbf{F} , когда \mathbf{S} является единичным вектором в j -м направлении. Здесь мы рассмотрели физическую интерпретацию линейного преобразования Σ на примере напряжений в твердых телах или кристаллах.

Физический процесс диффузии в изотропных средах описывается законом Фика:

$$\mathbf{J} = -d\nabla\phi,$$

где ϕ – это плотность концентрации диффузионного вещества, которая является функцией пространственного положения \mathbf{x} ; $\nabla\phi$ – это градиент ϕ ; \mathbf{J} – это поток диффузионного вещества, а d – это скалярная константа, называемая коэффициентом диффузии. Однако в анизотропных средах поток \mathbf{J} обычно не имеет того же направления, что и $\nabla\phi$, но все же имеет линейную зависимость от $\nabla\phi$. Это означает, что \mathbf{J} и $\nabla\phi$ связаны линейным преобразованием:

$$\mathbf{J} = -D\nabla\phi.$$

Это линейное преобразование D часто называют тензором диффузии, и оно имеет девять компонентов при выборе системы координат. В координатной форме его можно записать как

$$J_i = -\sum_{j=1}^3 D_{ij} \frac{\partial\phi}{\partial x_j}.$$

Мозг состоит из серого и белого веществ. Серое вещество состоит из тел нейронов, а белое вещество – из миелинизированных аксонов, которые служат в качестве межнейронных соединений. Диффузия воды в мозге имеет высокую анизотропию из-за этих аксонов. С помощью магнитно-резонансной томографии (МРТ) можно измерить компоненты тензора диффузии в пространстве, что используется для реконструкции волоконных пучков в мозге. Это называется диффузионной тензорной визуализацией (diffusion tensor imaging, DTI). На рис. 1.3 показано поле тензора диффузии (представленное эллипсоидами, см. раздел 5 главы 8). На рис. 1.4 показаны волокнистые тракты мозга, реконструированные с помощью DTI.

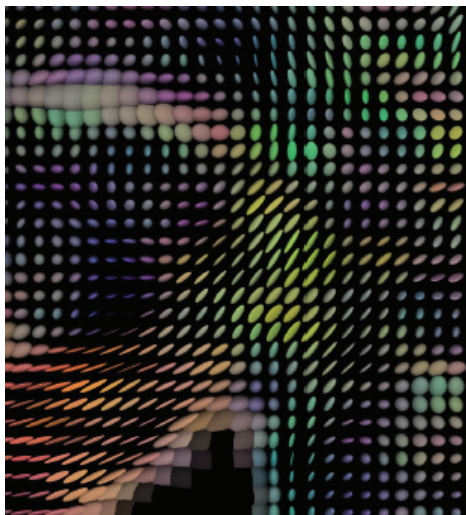


Рис. 1.3 ❖ Диффузионная тензорная визуализация: эллипсоиды тензоров диффузии

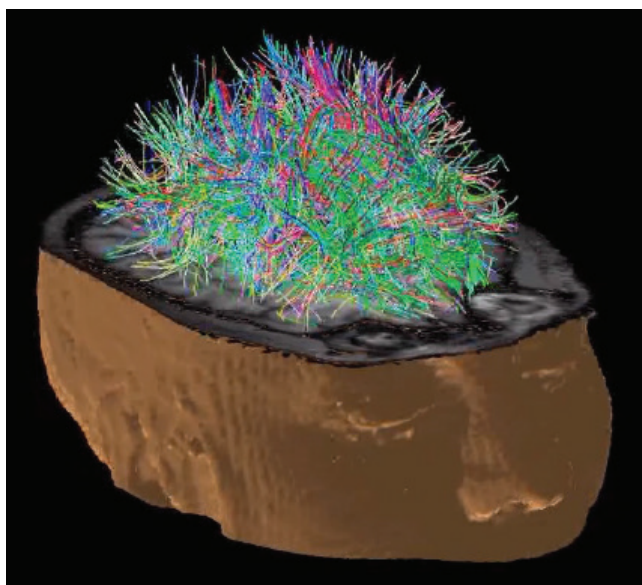


Рис. 1.4 ❖ Диффузионная тензорная визуализация: волокна в белом веществе головного мозга

§5. Тензоры без названия – линейные преобразования

Многие известные нам объекты на самом деле являются тензорами, но они не всегда называются тензорами. Сейчас мы увидим, что линейные отображения и линейные преобразования являются тензорами. Осознание того, что эти обыденные объекты на самом деле являются тензорами, оказывает эффект удаления покрыва таинственности. Здесь излагается только основная идея. Подробности будут рассмотрены в главах 5 и 6.

Когда выбран базис векторного пространства V , линейное преобразование $\varphi : V \rightarrow V$ может быть представлено матрицей. При изменении базиса матрица линейного преобразования соответственно изменяется. Это объясняет то, почему тензоры в традиционном определении должны подчиняться законам преобразования, и, что наиболее важно, объясняет причину возникновения этих преобразований.

Предположим, что $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – это внутреннее произведение, определенное в V . Имея два постоянных вектора $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V$, мы определяем линейное преобразование:

$$\begin{aligned} \varphi_{\mathbf{a},\mathbf{b}} : V &\rightarrow V; \\ \mathbf{x} &\mapsto \varphi_{\mathbf{a},\mathbf{b}}(\mathbf{x}) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{a}\langle \mathbf{b}, \mathbf{x} \rangle \text{ для всех } \mathbf{x} \in V. \end{aligned}$$

По сути, вектор \mathbf{x} проецируется на \mathbf{b} и вычисляется внутреннее произведение $\langle \mathbf{b}, \mathbf{x} \rangle$. Конечным результатом является вектор, направленный вдоль \mathbf{a} , но масштабированный коэффициентом $\langle \mathbf{b}, \mathbf{x} \rangle$.

Вектор \mathbf{b} в этом случае можно рассматривать как линейную функцию в двойственном пространстве V^* . Эффект действия \mathbf{b} на вектор $\mathbf{x} \in V$ равен $\mathbf{b}(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{b}, \mathbf{x} \rangle$. Линейное преобразование $\varphi_{\mathbf{a},\mathbf{b}}$ фактически является тензорным произведением в $V \otimes V^*$, и мы обозначаем его через $\varphi_{\mathbf{a},\mathbf{b}} = \mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$.

Неопытному читателю может показаться, что все линейные преобразования можно записать в виде $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$, где $\mathbf{a} \in V$ и $\mathbf{b} \in V^*$, но это не так. Однако любое линейное преобразование можно записать как сумму этих тензорных произведений: $\mathbf{a}_1 \otimes \mathbf{b}_1 + \dots + \mathbf{a}_k \otimes \mathbf{b}_k$. Таким образом, линейное преобразование является смешанным тензором типа $(1, 1)$ и, конечно же, подчиняется закону преобразования в уравнении 1.4. Именно поэтому тензор инерции, тензор напряжений и тензор диффузии являются тензорами, но, говоря простым языком, они являются всего лишь линейными преобразованиями.

Линейное преобразование также является частным случаем более общей модели – векторного тензора, который представляет собой многолинейное отображение $\Phi : V_1 \times \dots \times V_q \rightarrow X$. Когда $q = 1$ и $V_1 = X = V$, мы имеем линейное преобразование $\Phi : V \rightarrow V$. Векторные тензоры рассмотрены в разделе 8 главы 5.

§6. Сравнение: различные определения вектора – конкретные системы против абстрактных систем

Чтобы лучше понять концепцию тензора, проведем сравнение с уже знакомым нам вектором. Ключом к пониманию сложности, связанной с тензорами, является осознание взаимосвязи между абстрактными концепциями и конкретными примерами.

Исторически сложилось так, что существуют различные определения векторов. Эти определения не являются полностью эквивалентными и отражают историческую эволюцию концепции.

Определение 8. Вектор – это величина, имеющая величину и направление.

Определение 9. Вектор – это направленный отрезок, прямой в пространстве. Сложение двух векторов определяется законом параллелограмма.

Определение 10. Вектор – это n -кортеж действительных чисел (x_1, \dots, x_n) .

Определение 11. Пусть F – это поле, а V – это непустое множество. Пространство V вместе с двумя операциями, называемыми сложением $(+): V \times V \rightarrow V$ и умножением скаляра на вектор $(\cdot): F \times V \rightarrow V$, называется векторным пространством над F , если эти операции удовлетворяют следующим условиям. Элементы V называются векторами, а элементы F – скалярами.

$$(1) (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}).$$

$$(2) \text{ Существует } \mathbf{0} \in V \text{ такое, что } \mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u}.$$

$$(3) \text{ Для любого } \mathbf{u} \in V \text{ существует } \mathbf{x} \in V \text{ такое, что } \mathbf{u} + \mathbf{x} = \mathbf{0}. \text{ Обозначим } \mathbf{x} = -\mathbf{u}.$$

$$(4) a(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = a\mathbf{u} + a\mathbf{v}.$$

$$(5) (a + b)\mathbf{u} = a\mathbf{u} + b\mathbf{u}.$$

$$(6) a(b\mathbf{u}) = (ab)\mathbf{u}.$$

$$(7) 1\mathbf{u} = \mathbf{u}, \text{ где } 1 \in F \text{ является мультипликативным единичным элементом в } F.$$

Читатель, возможно, уже знает, что векторное пространство является абелевой (коммутативной) группой по отношению к сложению векторов, но может обнаружить, что коммутативный закон $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$ отсутствует в приведенном выше списке аксиом. Эти аксиомы были впервые предложены Пенано. Он включил в них этот коммутативный закон, и почти все последующие учебники просто последовали его примеру. Однако эта аксиома не является

независимой от остальных, и поэтому нет необходимости включать ее в перечисление явно (см. доказательство в приложении 1). Пеано был мастером аксиоматических систем. Примечательно, что он разработал эту аксиоматическую систему для векторного пространства (которую он назвал линейной системой) еще в 1888 году. Удивительно, но все аксиомы, за исключением коммутативного закона сложения, оказались независимыми.

Примечание. Определение 8 является традиционным и расплывчатым. Определение 10 является более обобщенным, чем определение 9, поскольку оно определяет n -мерный вектор, в то время как вектор в определении 9 является 3-мерным.

Определение 11 является самым общим и самым абстрактным из всех. Это аксиоматическое определение. Любая система, удовлетворяющая этим аксиомам, называется моделью абстрактного векторного пространства. Векторы, сформулированные в определениях 9 и 10, являются примерами или моделями векторного пространства. Ниже приводится множество других моделей векторов.

Пример 1 (матричные пространства). Все $m \times n$ действительные матрицы $M_{m,n}$ образуют действительное векторное пространство по отношению к сложению матриц и умножению матриц на число. Каждая $m \times n$ матрица является вектором.

Пример 2 (линейные отображения). Пусть V и W – это векторные пространства. Все линейные отображения $\varphi : V \rightarrow W$ образуют векторное пространство. Каждое линейное отображение является вектором.

Пример 3 (многочлены степени не более n). Все многочлены с действительными коэффициентами степени не более n образуют вещественное векторное пространство относительно сложения многочленов и умножения на число. Каждый многочлен является вектором.

Пример 4 (все многочлены). Все многочлены одной переменной с действительными коэффициентами образуют действительное векторное пространство относительно сложения и умножения на число. Каждый многочлен является вектором. Это векторное пространство является бесконечным.

Пример 5 (реальные функции). Все реальные функции $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ образуют реальное векторное пространство. Если f, g – это две реальные функции, а $a, x \in \mathbb{R}$, то мы определяем $f + g = h$, где $h(x) = f(x) + g(x)$; и $(af)(x) = af(x)$. Каждая реальная функция является вектором. Это векторное пространство является бесконечным.

Несмотря на большое количество, казалось бы, разных моделей, есть одно интересное свойство. А именно: любая модель n -мерного векторного пространства изоморфна друг другу, в частности изоморфна векторному пространству n -кортежей в определении 10. Благодаря этому изоморфизму мы имеем

свободу выбора между абстрактным определением 11 и конкретным определением 10.

Различные определения тензоров также отражают историю развития этого концепта.

Определение 5 для тензоров находится в аналогичном положении по отношению к определению 11 для векторов. Это абстрактное, или аксиоматическое, определение. Определения 3, 4 и 7 являются моделями абстрактного тензора.

§7. Тензорное произведение и тензорные пространства

Мы можем задаться двумя различными, но связанными между собой вопросами:

«Что такое тензор?»

«Что такое тензорное пространство?»

Определения 3 и 4 характеризуют отдельный тензор, а определение 5 характеризует абстрактное тензорное (производное) пространство $U \otimes V$, и любой элемент этого пространства называется тензором.

Мы рассмотрим пространства тензорных произведений в главе 5 и пространства тензорных степеней $V^{\otimes p} = V \otimes \dots \otimes V$ в главе 6.

Когда мы говорим о тензорных пространствах $U \otimes V$ или $V^{\otimes p}$, не следует упускать из виду связь между тензорным пространством $V^{\otimes p}$ и векторным пространством V . Мы называем V *базисным векторным пространством* (underlying vector space) тензорного пространства $V^{\otimes p}$.

Существует хорошее сравнение с векторными пространствами. Помните, что в векторном пространстве есть два различных множества: множество векторов V и множество скаляров, которое является полем F . Множество V называется «векторным пространством над полем F », а поле F называется *базисным полем* (ground field) множества V (см. рис. 1.5).

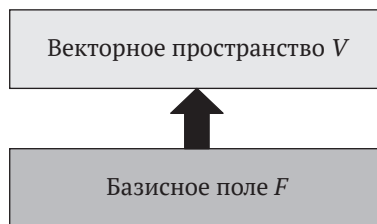


Рис. 1.5 ❖ Векторное пространство V и его базисное поле F

Взаимодействие между базисным полем F и векторным пространством V осуществляется посредством умножения скаляра на вектор $() : F \times V \rightarrow V$.

Связь между базисным векторным пространством и тензорным пространством представляет собой тензорное произведение, которое является билинейным отображением $\otimes : V \times V \rightarrow V \otimes V$. С этой точки зрения, тензорное пространство $V^{\otimes 2} = V \otimes V$ само по себе является векторным пространством. Тензор также является вектором. Этот подход отличается от традиционного представления о том, что тензоры являются обобщением векторов, поскольку их законы преобразования отличаются (см. рис. 1.6).

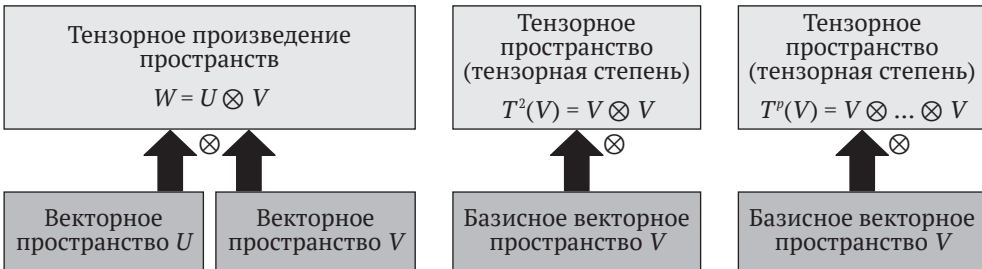


Рис. 1.6 ❖ Тензорное пространство $V^{\otimes p}$ и его базисное векторное пространство V

При заданном для V базисе $\{e_1, \dots, e_n\}$ тензоры $\{\tau_{ij} | \tau_{ij} = e_i \otimes e_j, i, j = 1, \dots, n\}$ образуют базис для тензорного пространства $V^{\otimes 2}$, которое содержит n^2 базисных векторов. Когда базис $\{e_1, \dots, e_n\}$ пространства V изменяется, индуцированный базис $\{\tau_{ij}\}$ для $V^{\otimes 2}$ изменяется соответствующим образом. Тогда изменение координат тензора в $V^{\otimes 2}$ подчиняется законам, приведенным в определении 2. Таким образом, эти законы изменения координат относятся к изменениям координат тензоров в $V^{\otimes 2}$ в ответ на изменение базиса V , а не в ответ на изменение базиса $V^{\otimes 2}$, который также является векторным пространством (см. рис. 1.7). По этой причине тензор тоже является вектором, а не обобщением вектора. Мы могли бы использовать один индекс от 1 до n^2 для компонентов тензора. Если его базис изменяется, компоненты тензора в $V^{\otimes 2}$ с одним индексом будут вести себя как вектор (см. рис. 1.8). Причина, по которой мы используем двойные индексы ij , заключается в отношении между V и $V^{\otimes 2}$, которое является тензорным произведением \otimes .

§8. Степень, ранг, порядок или размерность – какое название лучше?

В литературе можно встретить множество терминов – ранг, порядок и степень, которые используются как синонимы. Все они означают одно и то же – количество индексов компонента тензора. В сообществе машинного обуче-

ния для этого даже используют термин «измерение» (dimension), поскольку термин «тензор» используется в значении многомерного массива.

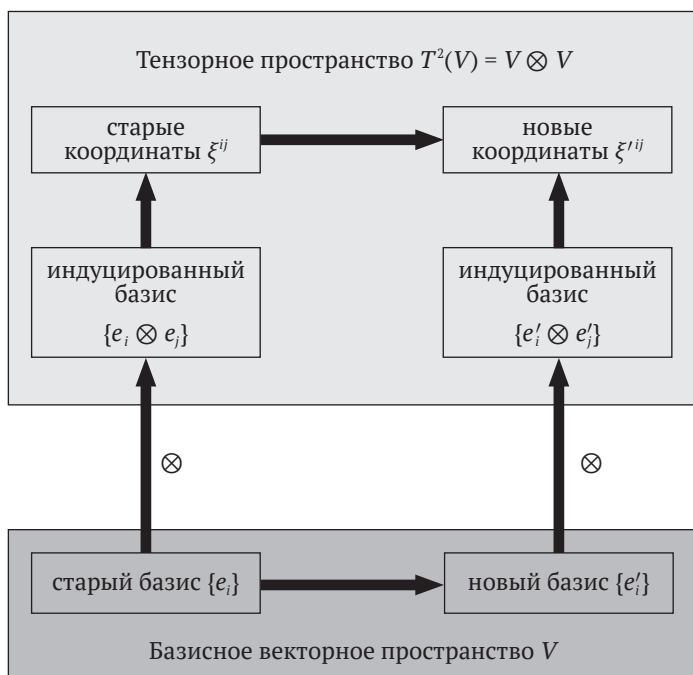


Рис. 1.7 ❖ Изменение координат тензора

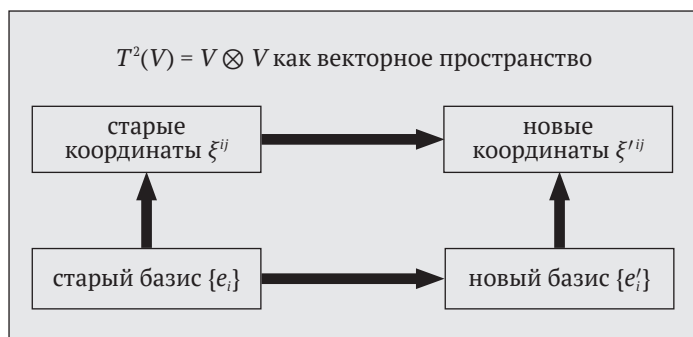


Рис. 1.8 ❖ Изменение координат тензора как вектора

Риччи никогда не использовал термин «тензор» в своих работах. Он называл его «системой». Он также использовал термин «порядок» системы. Физики чаще используют термин «ранг» (rank).

Тем не менее в современном представлении тензорное пространство $V^{\otimes p} = V \otimes \dots \otimes V$ является p -й тензорной степенью (тензорным произведением одного и того же векторного пространства на само себя p раз).

Естественно называть p степенью, проводя аналогию с названием степени многочленов. Это название согласуется с *Encyclopedic Dictionary of Mathematics* [Japanese Mathematical Society (1993)], который является отличным справочным источником и содержит стандартную терминологию современной математики.

Согласно N. Bourbaki [(1942)], термин «ранг тензора» (rank of a tensor) определяется с другим значением, отличным от степени. Напомним, что ранг квадратной матрицы (подобно линейному преобразованию) определяется как число линейно независимых столбцов (или строк). Квадратная матрица $n \times n$ может иметь ранг от 1 до n . Тензор степени 2 может иметь ранг от 1 до n . Любой декомпозируемый тензор степени 2 имеет ранг 1 (подробнее см. в разделе 5 главы 5).

*§9. Что такое псевдоскаляры, псевдовекторы и псевдотензоры?

В старых учебниках по физике некоторые авторы вводят такие термины, как псевдоскаляры, псевдовекторы и, в общем случае, псевдотензоры. Они также определяются различными законами преобразования. Давайте сначала рассмотрим так называемые псевдовекторы.

Определение таково: величина называется псевдовектором (или осевым вектором), если она преобразуется как вектор при правильном преобразовании (например, вращении), но при неправильном преобразовании получает дополнительное изменение знака.

Правильное преобразование сохраняет ориентацию ориентированного векторного пространства, а неправильное преобразование изменяет ориентацию. Например, отражение $x'' = -x$, $y' = -y$, $z' = -z$ является неправильным преобразованием.

Один из примеров псевдовектора иллюстрируется как векторное произведение $\mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$. Утверждается, что для обычного вектора (также называемого полярным вектором), когда координаты проходят через отражение, \mathbf{v} должен преобразовываться в $\mathbf{v}' = -\mathbf{v}$. Но для векторного произведения $\mathbf{w}' = (-\mathbf{u}) \times (-\mathbf{v}) = \mathbf{w}$. Примерами псевдовекторов являются магнитное поле и угловой момент.

Одним из примеров псевдоскаляра является тройное скалярное произведение (представляющее объем со знаком) трех векторов $a = \mathbf{v}_1 \cdot (\mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_3)$. В случае отражения координат получается $a' = (-\mathbf{v}_1) \cdot [(-\mathbf{v}_2) \times (-\mathbf{v}_3)] = -a$.

Этот аргумент не кажется логичным. Скаляр – это просто число, и оно не должно зависеть от координат. Почему оно должно зависеть от отражения координат и соответственно изменять знак?

При более внимательном рассмотрении становится очевидным, что в этих определениях кое-что не выражено достаточно ясно и логично. Возьмем,

к примеру, псевдовектор. Пусть V и W – это трехмерные векторные пространства, где $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ и $\mathbf{w} \in W$. Поскольку V и W изоморфны, давайте их разграничим. Теперь рассмотрим векторное произведение как отображение $(\times) : V \times V \rightarrow W$. Здесь \times не является отображением тензорного произведения, но в подобной ситуации является билинейным отображением. Оно соединяет пространства V и W . Пусть $\mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$, а $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ – это базис для V . Определим $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \in W$,

$$\mathbf{e}_1 \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{b}_2 \times \mathbf{b}_3,$$

$$\mathbf{e}_2 \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{b}_3 \times \mathbf{b}_1,$$

$$\mathbf{e}_3 \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{b}_1 \times \mathbf{b}_2.$$

Тогда $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ образует базис для W . После отражения координат новые индуцированные базисные векторы имеют вид:

$$\mathbf{e}'_1 \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{b}'_2 \times \mathbf{b}'_3 = (-\mathbf{b}_2) \times (-\mathbf{b}_3) = \mathbf{e}_1,$$

$$\mathbf{e}'_2 \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{b}'_3 \times \mathbf{b}'_1 = (-\mathbf{b}_3) \times (-\mathbf{b}_1) = \mathbf{e}_2,$$

$$\mathbf{e}'_3 \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{b}'_1 \times \mathbf{b}'_2 = (-\mathbf{b}_1) \times (-\mathbf{b}_2) = \mathbf{e}_3.$$

Следовательно, \mathbf{w} имеет те же координаты в индуцированном базисе $\{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\}$, что и в базисе $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$. Это также аналогичным образом объясняется на рис. 1.7, за исключением того, что теперь отображение является перекрестным произведением \times , а не тензорным произведением \otimes . Это означает, что \mathbf{w} , будучи кортежем из трех элементов и членом W , безусловно является обычным вектором. Если пространство W не связано с V , то при отражении базиса W координаты \mathbf{w} относительно нового базиса W , несомненно, меняют знак. Когда мы говорим, что \mathbf{w} является псевдовектором и знаки \mathbf{w} не меняются, мы имеем в виду индуцированные базисы $\mathbf{e}'_1 = \mathbf{b}'_2 \times \mathbf{b}'_3$, $\mathbf{e}'_2 = \mathbf{b}'_3 \times \mathbf{b}'_1$ и $\mathbf{e}'_3 = \mathbf{b}'_1 \times \mathbf{b}'_2$, которые индуцированы векторным произведением.

В конце концов, псевдовекторы можно рассматривать в качестве элементов векторного пространства W . Псевдовекторы являются обычными векторами и преобразуются как обычные векторы при смене базиса в самом W . Однако существует связь между векторным пространством W и другим базисным векторным пространством V . В общем случае обозначим ее как $\circledast : V \times V \rightarrow W$. Координаты псевдовектора в W изменяются как псевдовектор относительно изменения базиса в V , составленного с отображением \circledast .

Векторное произведение применимо только в трехмерных векторных пространствах. Для обобщенного n -мерного векторного пространства V псевдовекторы можно рассматривать как существующие в пространстве $\Lambda^{n-1}(V)$, которое является внешним пространством над V в степени $(n - 1)$. Оно имеет ту же размерность, что и V . Псевдовектор в $\Lambda^{n-1}(V)$ можно рассматривать как дуальную функцию Ходжа вектора в V . Псевдоскаляр можно считать существующим в пространстве $\Lambda^n(V)$, которое является двойственным к $\Lambda^0(V) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{R}$ и имеет размерность 1.

Для псевдотензора второй степени он преобразуется как

$$(\xi')^{st} = \text{sign}(\Lambda) \sum_{\sigma, \tau} \xi^{\sigma\tau} \Lambda_{\sigma}^s \Lambda_{\tau}^t,$$

где $\text{sign}(\Lambda)$ – это знак $\det \Lambda$. Этот дополнительный знак также можно рассматривать как результат некоторого билинейного отображения, соединяющего пространство псевдотензоров W с базисным векторным пространством V :

$$\odot : V \times V \rightarrow W.$$

Более обобщенным концептом является тензорная плотность веса k с законом преобразования

$$(\xi')^{st} = (\det \Lambda)^k \sum_{\sigma, \tau} \xi^{\sigma\tau} \Lambda_{\sigma}^s \Lambda_{\tau}^t,$$

где $\det \Lambda$ – это определитель матрицы преобразования Λ в базисном векторном пространстве V , а k – это постоянный показатель степени.

§10. Что такое тензорный анализ? Связь с геометрией Римана

10.1. Векторный анализ

Векторный анализ занимается изучением векторных функций. Пусть V – это векторное пространство над \mathbb{R} . Векторная функция может быть функцией одной переменной $\mathbf{p} : \mathbb{R} \rightarrow V; t \rightarrow \mathbf{p}(t)$ или функцией нескольких переменных, например $\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \rightarrow V; (x, y, z) \rightarrow \mathbf{f}(x, y, z)$. Зачастую $\mathbf{p}(t)$ интерпретируется как вектор, который изменяется со временем t , а $\mathbf{f}(x, y, z)$ – как векторное поле, в котором каждому пространственному положению (x, y, z) соответствует вектор \mathbf{f} . Таким образом, векторный анализ – это дифференциальное исчисление векторных полей, а векторные функции одной переменной можно рассматривать как частный случай.

Пионером векторного анализа был Гиббс. Его книга [Gibbs (1884)] посвящена как векторной алгебре, так и векторному анализу. В векторном анализе определяются три дифференциальных оператора на векторных (или скалярных) полях: градиент скалярного поля $\nabla \varphi$, дивергенция векторного поля $\nabla \cdot \mathbf{f}$ и ротор (или ротация) векторного поля $\nabla \times \mathbf{f}$. Важные теоремы, связанные с этими операторами, включают теорему Гаусса

$$\iiint_V (\nabla \cdot \mathbf{f}) dV = \oint_{\partial V} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S},$$

теорему Стокса

$$\iint_S (\nabla \times \mathbf{f}) \cdot d\mathbf{S} = \oint_{\partial S} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r},$$

и такие свойства, как

$$\nabla \times (\nabla \varphi) = 0,$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{f}) = 0.$$

10.2. Тензорный анализ и геометрия Римана

Существует тенденция рассматривать тензоры как обобщение векторов, и естественно предположить, что изучение тензоров следует разделить на тензорную алгебру и тензорный анализ, при этом второе направление изучает дифференциальное исчисление тензорных полей в евклидовом пространстве \mathbb{R}^3 . На самом деле тензорный анализ в этом смысле был также разработан Гиббсом и описан в его книге по векторному анализу. Гиббс использовал другую терминологию, но его диадики и полиадики являются тензорами в современном понимании. Он определил несколько алгебраических операций – скалярное и векторное произведения для диадиков, которые могут быть линейно расширены на общие тензоры, такие как

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{bc}) \stackrel{\text{def}}{=} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c},$$

$$(\mathbf{ab}) \cdot \mathbf{c} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{a} (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}),$$

$$(\mathbf{ab}) \cdot (\mathbf{cd}) \stackrel{\text{def}}{=} (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})\mathbf{ad},$$

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{bc}) \stackrel{\text{def}}{=} (\mathbf{a} \times \mathbf{b})\mathbf{c},$$

$$(\mathbf{ab}) \times \mathbf{c} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{a} (\mathbf{b} \times \mathbf{c}),$$

$$(\mathbf{ab}) : (\mathbf{cd}) \stackrel{\text{def}}{=} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{d}) (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})$$

и т. д. В соответствии с этим, рассматривая оператор набла ∇ как векторный оператор, можно определить градиент вектора $\nabla \mathbf{u}$, градиент, дивергенцию и ротор тензоров $\nabla(\mathbf{uv})$, $\nabla \cdot (\mathbf{uv})$, $\nabla \times (\mathbf{uv})$ и многие другие операции. Гиббс исследовал свойства этих операций и продемонстрировал множество приложений в физике и математике, включая прикладные задачи по кривизне поверхностей в дифференциальной геометрии.

Однако тензорный анализ в этом направлении изучения тензорных полей в евклидовом пространстве \mathbb{R}^3 за всю историю не продвинулся слишком далеко, поскольку он является довольно простым. То, что сегодня называется тензорным анализом, рассматривается в контексте геометрии Римана. Предполагается, что тензорные поля являются тензорными полями на многообразии Римана или, в более общем случае, на дифференцируемом многообразии.

Риччи назвал свою работу «абсолютным исчислением», уделяя особое внимание ковариантной производной. Леви-Чивита внес вклад в развитие концепции параллельного переноса. Леви-Чивита не использовал термин «тензор» в своих ранних работах, но принял это новое название в своей

книге [Levi-Civita (1927)] *The Absolute Differential Calculus (Calculus of Tensors)* после того, как Эйнштейн и Гроссман сделали термин «тензор» достаточно популярным.

Однако тензорный анализ на самом деле не является новой или независимой дисциплиной математики. Это просто риманова геометрия в немного ином дискурсе, характерном для формы представления компонентов (или индексов). В своей книге *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times* М. Клайн (М. Kline[1972]) пишет:

«Тензорный анализ зачастую описывается как совершенно новая веха в математике, созданная с нуля либо для достижения какой-то конкретной цели, либо просто для удовольствия математиков. На самом деле это не более чем вариант старой темы, а именно – изучение дифференциальных инвариантов, связанных в первую очередь с геометрией Римана».

«Дифференциальный инвариант, связанный в первую очередь с римановой геометрией», о котором говорит Клайн, – это фундаментальная форма $ds^2 = \sum_{i=1}^n g_{ij} dx_i dx_j$, или элемент линии, или метрический тензор, который является обобщением первой фундаментальной формы Гаусса на более высокие размерности. Он инвариантен при преобразованиях координат (или изометрических отображениях, в активном представлении) или перепараметризации (в пассивном представлении). Характерной чертой абсолютного дифференциального исчисления Риччи, или тензорного анализа, является компонентный подход. В работе Ё. Cartan [(2002)] рекомендуется «по возможности избегать очень формальных вычислений, в которых множество тензорных индексов скрывает геометрическую картину, зачастую весьма простую». В главе 10 дается обзор римановой геометрии и общей теории относительности, но более глубокое изучение этой темы выходит за рамки данной книги. За дополнительной информацией читатель может обратиться к [Bishop and Goldberg (1980)] и [Guo (2014)].