

# Содержание

<b>Предисловие</b> .....	12
--------------------------	----

## **Часть I** **Основы теории вейвлетов**

### **Глава 1**

<b>Преобразование Фурье</b> .....	17
1.1. Предварительные понятия .....	18
1.2. Ряды Фурье .....	19
1.3. Преобразование Фурье .....	23
1.3.1. Преобразование Фурье в $L_1(\mathbb{R})$ .....	24
1.3.2. Преобразование Фурье в $L_2(\mathbb{R})$ .....	25
1.3.3. Свойства преобразования Фурье .....	26
1.3.4. Примеры .....	28
1.3.5. Теорема Пэли-Винера .....	29
1.3.6. Преобразование Фурье экспоненциально убывающей функции .....	30
1.3.7. Формула суммирования Пуассона .....	30
1.3.8. Оконное преобразование Фурье .....	31
1.3.9. Преобразование Фурье обобщенных функций .....	32
1.3.10. Примеры .....	35
1.4. Преобразование Фурье дискретных сигналов ...	35
1.4.1. Дискретизация .....	35
1.4.2. Дискретное преобразование Фурье длины $N$ .....	38
1.4.3. Преобразование Фурье числовой последовательности .....	40
1.4.4. $Z$ -преобразование .....	42

---

1.4.5. Примеры .....	43
1.5. Фильтры .....	45
1.5.1. Фильтрация непрерывных сигналов .....	46
1.5.2. Примеры фильтров .....	48
1.5.3. Цифровые фильтры .....	50
1.5.4. Примеры цифровых фильтров .....	51
1.6. Разложение сигнала на низкочастотную и высокочастотную составляющие .....	54
1.6.1. Разложение идеальными фильтрами .....	55
1.6.2. Восстановление идеальными фильтрами .....	59
1.6.3. Общий случай .....	60
1.6.4. Примеры .....	64
1.6.5. Многоуровневый анализ сигналов .....	68

## Глава 2

### **Основы теории вейвлетов .....** 71

2.1. Вейвлеты Хаара .....	72
2.1.1. Масштабирующая последовательность подпространств .....	73
2.1.2. Пространства вейвлетов .....	75
2.1.3. Операторы проектирования .....	79
2.2. Масштабирующие функции .....	82
2.2.1. Примеры и общие свойства масштабирующих функций .....	82
2.2.2. Построение масштабирующей функции .....	86
2.3. Ортогональный кратномасштабный анализ .....	92
2.3.1. Ортогональное кратномасштабное разложение .....	92
2.3.2. Вейвлеты .....	96
2.3.3. О единственности порождающих функций .....	101
2.3.4. Неортогональный случай .....	102

2.4. Примеры кратномасштабного анализа и вейвлетов .....	106
2.4.1. Вейвлеты Шеннона–Котельникова .....	106
2.4.2. Вейвлеты Мейера .....	109
2.5. Вейвлеты Батла–Лемарье. В-сплайны .....	115
2.5.1. Вейвлеты на основе В-сплайна степени 1 .....	115
2.5.2. В-сплайны .....	119
2.5.3. Сплайновые вейвлеты .....	122
2.6. Вейвлет-преобразование .....	125
2.6.1. Вейвлет-разложение .....	125
2.6.2. Быстрое вейвлет-преобразование .....	128
2.6.3. Вопрос о начальных коэффициентах .....	129
2.6.4. Восстановление .....	130
2.6.5. Вейвлет-пакеты .....	132
2.7. Регулярность и нулевые моменты .....	136
2.8. Построение вейвлетов Добеши с компактным носителем .....	142
2.8.1. Частотная функция .....	143
2.8.2. Симлеты .....	149
2.9. Койфлеты .....	151
2.10. Биортогональные вейвлеты .....	154
2.10.1. Мотивировка и определение .....	154
2.10.2. Условия на функцию $\varphi(x)$ .....	156
2.10.3. Функция $\psi(x)$ .....	157
2.10.4. Построение функции $\tilde{\varphi}(x)$ .....	158
2.10.5. Построение функций $\psi(x)$ и $\tilde{\psi}(x)$ .....	160
2.10.6. Условия на коэффициенты .....	161
2.10.7. Симметричные биортогональные вейвлеты .....	162

---

2.10.8. Сплаины .....	163
2.11. Двумерные вейвлеты .....	166
2.12. Непрерывное вейвлет-преобразование .....	170
2.12.1. Непрерывное вейвлет-преобразование в одномерном случае .....	170
2.12.2. Многомерные обобщения непрерывного вейвлет-преобразования .....	173
2.12.3. Примеры двумерных вейвлетов .....	180
2.12.4. Вейвлеты на многообразиях .....	181
2.13. Вейвлеты с коэффициентом масштабирования $N$ .....	191
2.13.1 Масштабирующие функции .....	192
2.13.2. $N$ -кратномасштабное разложение .....	194
2.13.3. Вейвлеты с коэффициентом масштабирования $N$ .....	195
2.13.4. Вейвлет-преобразование .....	196
2.13.5. Разложение и восстановление в неортогональном случае .....	198
2.14. Примеры $N$ -масштабирующих функций и вейвлетов .....	201
2.14.1. Вейвлеты Хаара с параметром сжатия $N$ .....	201
2.14.2. Вейвлеты Котельникова–Шеннона с параметром сжатия $N$ .....	205
2.14.3. Вырожденные масштабирующие функции и вейвлеты Кантора .....	207
2.14.4. Сплайновые масштабирующие функции .....	212
2.14.5. Вейвлеты на основе $B$ -сплайнов .....	215
2.14.6. Кратные коэффициенты масштабирования .....	226
2.15. Построение ортогональных вейвлетов с компактным носителем для $N > 2$ .....	230

2.15.1. Общие конструкции .....	231
2.14.2. Построение ортогональных вейвлетов с компактным носителем для $N = 3$ .....	234
2.15.3. Примеры масштабирующих функций и вейвлетов для $N = 3$ .....	237

## Часть II

### Вейвлеты в MATLAB

#### Глава 3

<b>Функции вейвлет-анализа в MATLAB</b> .....	245
3.1. Вейвлеты в системе MATLAB .....	246
3.2. Фильтры вейвлетов .....	256
3.2.1. Масштабирующие фильтры .....	257
3.2.2. Фильтры разложения и восстановления .....	259
3.3. Одноуровневое дискретное одномерное вейвлет-преобразование .....	261
3.4. Многоуровневый одномерный вейвлет-анализ .....	265
3.5. Непрерывное вейвлет-преобразование <code>cwt</code> ...	272
3.6. Вейвлет-пакеты .....	276
3.7. Двумерное вейвлет-преобразование .....	286
3.7.1. Изображения в MATLAB .....	286
3.7.2. Вейвлет-преобразования двумерных сигналов ....	288
3.7.3. Основные функции двумерного вейвлет-преобразования .....	289
3.8. Удаление шума, компрессия .....	295
3.8.1. Обработка вейвлет-коэффициентов для удаления шума .....	295
3.8.2. Функции MATLAB для удаления шума .....	296

3.9. Тестовые сигналы в MATLAB .....	305
3.9.1. Одномерные тестовые сигналы .....	305
3.9.2. Изображения .....	306
3.9.3. Генерирование сигналов .....	306
3.10. Новые возможности Wavelet Toolbox версии 4.0 .....	309
3.10.1. Создание вейвлетов для непрерывного вейвлет-преобразования на основе образца .....	310
3.10.2. Слияние (наложение) изображений .....	312
3.10.3. Дробное броуновское движение .....	316
3.10.4. Методы лифтинга построения новых вейвлетов ..	319
3.10.5. Анализ многомерных сигналов .....	321
3.11. Вейвлет-анализ кардиосигнала.....	331
3.11.1. Многоуровневый анализ кардиосигнала .....	332
3.11.2. Непрерывный вейвлет-анализ кардиосигнала .....	338
3.11.3. Удаление шума, компрессия и сглаживание кардиосигнала.....	343
3.11.4. Использование пакетных разложений .....	345
3.12. Многоканальный вейвлет-анализ экономических данных.....	347
3.12.1. Многоуровневый анализ данных .....	347
3.12.2. Программы вейвлет-разложения и восстановления .....	365

## **Глава 4**

<b>Главное меню пакета Wavelet Toolbox .....</b>	<b>367</b>
4.1. Просмотр вейвлетов (Wavelet Display) .....	369
4.2. Одномерный дискретный вейвлет-анализ (Wavelet 1-D) .....	371

4.2.1. Вейвлет-разложение .....	371
4.2.2. Выбор различных видов разложения (Display mode) .....	372
4.2.3. Статистические характеристики коэффициентов разложения .....	374
4.2.4. Гистограммы (Histogram) .....	376
4.2.5. Сжатие сигнала .....	377
4.2.6. Удаление шума .....	378
4.3. Одномерный пакетный вейвлет-анализ .....	380
4.3.1. Вейвлет-разложение .....	381
4.3.2. Возможности раздела для обработки сигнала .....	381
4.4. Одномерный непрерывный вейвлет-анализ (Continuous Wavelet 1-D) .....	384
4.4.1. Начало работы .....	384
4.4.2. Анализ результатов .....	386
4.5. Комплексный одномерный непрерывный вейвлет-анализ (Complex Continuous Wavelet 1-D) ....	387
4.6. Удаление шума стационарного одномерного сигнала (SWT De-noising 1-D) .....	390
4.6.1. Основные понятия .....	390
4.6.2. Работа с SWT De-noising 1-D .....	392
4.7. Оценка плотности (Density Estimation 1-D) .....	396
4.7.1. Идея алгоритма .....	396
4.7.2. Работа с Density Estimation 1-D .....	398
4.8. Оценка регрессии (Regression Estimation 1-D) ...	400
4.8.1. Основные понятия .....	400
4.8.2. Работа с Regression Estimation 1-D .....	401
4.9. Выбор вейвлет-коэффициентов сигнала (Wavelet Coefficients Selection 1-D) .....	402

---

4.10. Двумерный дискретный вейвлет-анализ (Wavelet 2-D) .....	405
4.11. Двумерный пакетный вейвлет-анализ.....	408
4.12. Удаление шума изображения (SWT De-noising 2-D) .....	410
4.13. Выбор вейвлет-коэффициентов изображения (Wavelet Coefficients Selection 2-D) .....	411
4.14. Проектирование вейвлетов для непрерывного вейвлет-преобразования (New Wavelet for CWT) ....	413
4.15. Дробное броуновское движение (Fractional Brownian Generation 1-D) .....	415
4.16. Слияние двух изображений (Image Fusion) ....	416
4.17. Одномерный вейвлет-анализ мульти сигнала (Multisignal Analysis 1-D) .....	419
4.18. Многовариантное удаление шума (Multivariate Denoising) .....	426
4.19. Многомасштабный анализ главных компонент (Multiscale Principal Components Analysis) .....	431
4.20. Способы продолжения сигналов и изображений (Signal extension, Image extension) ....	435
<b>Приложение</b>	
<b>Список функций Wavelet Toolbox .....</b>	<b>439</b>
<b>Предметный указатель .....</b>	<b>443</b>
<b>Список литературы .....</b>	<b>446</b>



# Предисловие

Функции типа маленькой волны (всплески, или вейвлеты) в математике возникли достаточно давно при изучении базисов функциональных пространств. Однако только в последние десятилетия они нашли широкие применения в обработке сигналов и изображений. Эти приложения стимулировали мощное развитие теории вейвлетов. Популярность тематики стремительно растет. С основными применениями вейвлетов можно ознакомиться по замечательным обзорным статьям Астафьевой Н. М. [Ас] и Дремина И. М., Иванова О. В., Нечитайло В. А. [ДИН]. Кроме того, хорошая подборка популярных статей по вейвлетам опубликована в журнале «Компьютерра» [Кт].

Теория вейвлетов является мощной альтернативой анализу Фурье и дает более гибкую технику обработки сигналов. Одно из основных преимуществ вейвлет-анализа заключается в том, что он позволяет заметить хорошо локализованные изменения сигнала, тогда как анализ Фурье этого не дает – в коэффициентах Фурье отражается поведение сигнала за все время его существования. Разработанная глубокая и красивая математическая теория вейвлетов.

Из имеющихся на русском языке книг по вейвлетам отметим три фундаментальные монографии: И. Добеши [Дб], К. Чуи [Чу] и Новикова И. Я., Протасова В. Ю., Скопиной М. А. [НПС]. Издан перевод замечательной книги С. Малла [М] – это наиболее полное учебное пособие по обработке сигналов при помощи вейвлетов. В ней прекрасно сочетаются доступность и глубина изложения. Кроме того, издан еще ряд пособий, среди которых нужно отметить книгу Блаттера К. [Бл], учебные пособия Новикова Л. В. [Но], Петухова А. П. [Пе] и Захарова В. Г. [За]. В книге Дьяконова В. П. [Д] дано описание работы с вейвлетами в системах компьютерной математики Mathcad, MATLAB и Mathematica. Приложениям вейвлетов в компьютерной графике посвящены книги [СДС] и [У].

Данная книга предлагается как учебник по теории вейвлетов и их применениям для студентов по специальности «Прикладная математика». Она возникла на основе курса лекций, читаемых автором в течение ряда лет. Книга содержит необходимый теоретический материал, а вторая часть книги прямо ориентирована на

практические занятия по вейвлетам. Чтобы сделать книгу более независимой, в нее включены сведения по рядам и преобразованию Фурье, по фильтрам и разложению сигналов. Теоретический материал не должен быть самоцелью, нужно овладеть и практическими приемами работы с вейвлетами. Поэтому в книгу включено описание основных функций вейвлет-анализа в системе MATLAB и их использования для обработки сигналов. В соответствии с этим книга состоит из двух частей: «Основы теории вейвлетов» и «Вейвлеты в MATLAB». Выбор системы компьютерной математики MATLAB объясняется тем, что она популярна среди инженеров и математиков, занимающихся прикладными разработками, а также потому, что именно в MATLAB вейвлеты представлены наиболее полно.

Данное издание книги является переработанным и дополненным. Многие вопросы изложены более доступно. Добавлен раздел о многомерных обобщениях непрерывного вейвлет-преобразования, включая вейвлеты на однородных многообразиях, включено несколько параграфов, посвященных вейвлетам с произвольным натуральным коэффициентом сжатия  $N$ . Приведен пример вейвлет-анализа экономических данных, использующий вейвлеты с коэффициентом масштабирования  $N$ . Добавлено описание новых возможностей пакета Wavelet Toolbox MATLAB.

Рассмотрим кратко содержание книги. Теория вейвлетов широко использует технику рядов Фурье и преобразования Фурье. Поэтому в первой главе излагаются основные факты из этих тем. Даже если сигнал представлен функцией, практически для его анализа берется достаточно плотная выборка значений (дискретизация). Рассмотрены вопросы, которые возникают при дискретизации сигнала, определено дискретное преобразование Фурье, и изучаются его свойства. Вейвлет-преобразование сигнала сводится к действию на этот сигнал определенных фильтров. Поэтому в первой главе изложены также основные факты фильтрации сигналов. Рассмотрены вопросы разложения сигнала на сглаженную и высокочастотную компоненты и последующего восстановления сигнала. Хотя первая глава является вспомогательной, результаты последних параграфов существенны для понимания теории вейвлетов и их практических применений.

Вторая глава «Основы теории вейвлетов» является центральной в данной книге. Она содержит изложение основ теории вейвлетов и способов их построения. Начинается изложение с построения известного вейвлет-базиса Хаара. На этом примере мы рассматриваем основные конструкции, которые затем последовательно развиваются в следующих параграфах. Определяются понятия масштабированной функции и кратномасштабного разложения пространства функций. Рассмотрены примеры масштабированных функций и соответствующих вейвлетов: Шеннона–Котельникова, Мейера, ортогональных вейвлетов с компактным носителем, биортогональных вейвлетов. Кратко изложены вопросы о двумерных вейвлетах. Рассмотрены непрерывное вейвлет-преобразование и его многомерные обобщения, включая вейвлеты на многообразиях. В конце главы вводятся масштабированные функции с произвольным натуральным коэффициентом сжатия  $N$  и приводятся примеры построения соответствующих вейвлетов. Несмотря на то что в книге изложены не все темы теории вейвлетов, надеюсь, что ее содержание