

Оглавление

Предисловие	4
1 Аукционы бывают разные	6
1.1 Три аукциона и три модели	6
1.2 Поиск оптимальных стратегий	11
1.3 Теорема об одинаковой доходности	19
1.4 Пример с коррелированными ценностями	23
1.5 Задачи	27
1.6 Решения задач	28
1.7 Контрольная работа 1	34
1.8 Решение контрольной работы 1	35
2 Общая ценность, аффилированные сигналы	37
2.1 Напоминка по теории вероятностей	37
2.2 Большая сила о-малых!	39
2.3 Старые формулы на вероятностном языке	43
2.4 Просто разные примеры	47
2.5 Супермодулярные функции	53
2.6 Задачи	58
2.7 Решения задач	60
2.8 Контрольная работа 2	67
2.9 Решение контрольной работы 2	69
3 Сравнение аукционов в общем случае	71
3.1 Про симметричность	71
3.2 Ещё об аффилированности	73
3.3 Решение трёх аукционов	79

3.4	Теорема о сравнении доходностей	86
3.5	Задачи	88
3.6	Решения задач	90
3.7	Контрольная работа 3	97
3.8	Решение контрольной работы 3	98
3.9	Домашняя работа 3	102
3.10	Решение домашней работы 3	104
4	Язык механизмов	108
4.1	Описание всех задач на языке механизмов	108
4.2	Правдивость и другие желательные свойства	114
4.3	Механизм VCG	118
4.4	Оптимальный аукцион	122
4.5	Спасибо!	126
4.6	Задачи	127
4.7	Решения задач	130
4.8	Контрольная работа 4	133
4.9	Решение контрольной работы 4	134
4.10	Догонялка	136
4.11	Подсказки к догонялке	138
4.12	Прочие задачи	139
4.13	Немного решений	142
	Впечатления о курсе	143
	Предметный указатель	147
	Литература	150

Предисловие

Эта книга — подробный конспект лекций курса по моделированию аукционов. Курс был прочитан дистанционно в НИУ-ВШЭ в 2011 году. Самое важное отличие книги от других книг по моделированию аукционов — огромное количество задач с решениями!

Из книги любопытный читатель узнает, например:

- что аукцион — это не обязательно «дядя с молоточком»;
- как устроены самые крупные аукционы;
- почему не всегда победитель аукциона платит ту сумму, которую поставил;
- как влияют на прибыль организатора разные правила проведения аукциона;
- при каких условиях может нарушиться закон спроса.

В книге четыре главы. Первая — про разные виды аукционов и теоремы об эквивалентности доходностей, которая утверждает, что при независимости игроков все аукционы приносят одинаковый доход организатору аукциона. Вторая глава — техническая. Её цель — заполнить пробелы по теории вероятностей, рассказать технику решения задач с помощью ϵ -малых и объяснить концепцию аффилированных сигналов. Третья глава посвящена сравнению доходностей организатора аукциона в случае, когда игроки зависимы из-за того, что получают общую информацию о товаре. Четвертая глава излагает аукционы с помощью общего языка теории механизмов. В главе вводится механизм Викри—Кларка—Гровса и доказывается оптимальность аукциона второй цены с резервной ценой.

Моделирование аукционов — довольно сложная и сильно математизированная дисциплина. Именно из-за теоретической сложности она редко встречается в программе бакалавриата. Моей целью было сделать этот курс максимально доступным

для бакалавров. Поэтому я старался, во-первых, снизить входные требования к уровню подготовки, во-вторых, включить в курс максимальное количество задач с решениями.

Для чтения книги требуется немного теории игр и теории вероятностей. Из теории игр — понимание равновесия Нэша. Из теории вероятностей — умение считать условные вероятности и математические ожидания дискретных и непрерывных случайных величин.

Выражаю большую благодарность рецензентам Вадиму Львовичу Шагину и Николаю Петровичу Пильнику за ценные замечания.

Для удобства поиска внутри книги нумерация формул идёт постраничная. Например, формула (27.3) — это третья формула на 27-й странице. Конец доказательства обозначается значком \square .

Читателю могут также оказаться полезными видеолекции курса, vimeo.com/album/1530587, и блог, бывший активным в 2011 году, auctiontheory.wordpress.com/.

Удачи в освоении теории аукционов!

Борис Демешев
bdemeshev@hse.ru
Национальный исследовательский университет
«Высшая школа экономики»

Глава 1

Аукционы бывают разные

1.1. Три аукциона и три модели

- **Английский аукцион.** Именно этот аукцион описан в «12 стульях» Ильфа и Петрова. Игроки по очереди называют ставки. Каждая последующая ставка должна быть больше, чем предыдущая. Товар достаётся тому, кто назвал наибольшую цену. Победитель платит за товар столько, сколько он сам поставил¹. По этому принципу устроен самый крупный современный онлайн-аукцион товаров в Интернете, eBay, <http://www.ebay.com/>.
- **Голландский аукцион цветов.** Большинство цветов, продающихся в России, было куплено на аукционе цветов в Голландии. Этот традиционный аукцион отличается от английского. Потенциальные покупатели цветов сидят в общем зале. Перед ними на стене — большие часы с одной стрелкой. Стрелка показывает текущую цену товара. Изначально цена высока и никто не хочет покупать. С движением стрелки цена опускается. Наступит момент, когда одного из покупателей цена наконец устроит. Он получает товар и платит соответствующую цену.
- **Аукцион интернет-рекламы.** Когда пользователь набирает в поисковике (в Яндекс, Гугле или любом другом) какое-нибудь слово, к примеру «НИУ-ВШЭ», поисковик выдает найденные страницы и рекламные ссылки. Естественно, рекламодатели платят за то, что поисковик показывает их рекламные ссылки. Более того, рекламные ссылки продаются на аукционе! Представим себе, что

¹ Про оплату комиссионного сбора в 12 стульях мы, конечно, помним.

поисковик продаёт одно рекламное место. Желающие рекламодатели независимо друг от друга направляют свои заявки: «я готов платить за него 5 копеек за клик», «я готов платить 10 копеек за клик», «я готов платить 7 копеек за клик». Побеждает, естественно, тот, кто готов платить больше других. Но платит он не ту сумму, которую заявил в своей заявке! Победитель платит вторую по величине ставку! В нашем примере с тремя заявками рекламное место достается тому, кто был готов платить 10 копеек за клик, но платить он будет 7 копеек за клик. В реальности всё чуть сложнее. Например, рекламных мест может быть несколько, тогда тот, кому досталось второе по притягательности место, платит ставку того, кому досталось третье. Гугл продаёт свои рекламные ссылки на adwords.google.com.

Этим трём реальным примерам мы сопоставим три простые модели.

Общее между тремя моделями:

На аукционе продаётся единица неделимого товара, скажем одна морковь. За право получить морковь борются n покупателей.

1. **Кнопочный аукцион.** У каждого покупателя есть кнопка. Стартовая цена равна нулю. Изначально все покупатели давят на свои кнопки. Затем цена начинает расти. Как только игрок отпускает свою кнопку, он покидает аукцион. Аукцион прекращается, когда остаётся лишь один игрок, жмущий на кнопку. Товар достаётся этому игроку по цене, сложившейся на момент остановки.

Эта модель является упрощением реального английского аукциона. В реальности часто бывает, что игроки начинают активно играть лишь незадолго до окончания аукциона. Эта модель не предназначена для описания такого явления. В реальности игроки могут повышать текущую цену на произвольную величину, здесь же цена меняется непрерывно. Тем не менее многие свойства английского аукциона кнопочная модель ловит.

2. **Закрытый аукцион первой цены.** Покупатели одновременно делают свои ставки. Товар достаётся тому покупателю, который назвал самую высокую цену. Победитель платит продавцу свою ставку.

Такой аукцион лучше всего подходит для моделирования голландского аукциона. Действительно, на голландском аукционе никакой другой информации, кроме того, по какой цене был продан товар, ни один из игроков не получает. Голландский аукцион и аукцион первой цены стратегически эквивалентны — множество стратегий у каждого игрока одно и то же, и функция

выигрышей — такая же. В реальности на цену аукциона влияет, например, такой фактор, как скорость движения стрелки на часах.

3. **Закрытый аукцион второй цены.** Покупатели одновременно делают свои ставки. Товар достаётся тому покупателю, который назвал самую высокую цену. Победитель платит продавцу вторую по величине ставку, то есть наибольшую ставку, сделанную покупателями, за исключением его самого.

Эта модель хорошо подходит для аукциона интернет-рекламы с одним рекламным местом.

Чтобы разграничить реальность и модели, мы будем использовать слова «английский аукцион», «голландский аукцион» для описания реальных явлений, а слова «аукцион первой цены», «аукцион второй цены», «кнопочный аукцион» — для описания моделей.

Иногда вводят понятия: **открытый аукцион**, то есть аукцион, где игроки видят ставки других игроков, и **закрытый аукцион**, где игроки не видят ставок других игроков. По этой классификации кнопочный аукцион является открытым, а аукционы, где игроки делают ставки одновременно, — закрытыми.

Для формального описания наших задач нам потребуется куча обозначений. Мы их будем вводить потихоньку, поэтому пугаться не стоит. Нужно всего лишь быть очень аккуратным и отличать заглавные и строчные буквы, например x и X . Для удобства вынесем все обозначения в отдельный список. Встречайте...

Обозначения!

Событие:

- W_i — событие, состоящее в том, что победителем аукциона стал игрок i .

Случайные величины:

- X_i — случайная величина, сигнал о ценности, получаемый игроком. Значение X_i известно игроку i . Функцию распределения этой случайной величины обозначим $F()$, а функцию плотности — $f()$.
- V_i — случайная величина, ценность товара для игрока i . Если игрок точно знает ценность товара, то $V_i = X_i$. Есть множество других возможностей, например $X_i = V_i + e_i$, где e_i — некая случайная ошибка.
- Bid_i — случайная величина, ставка, которую сделает игрок i в равновесии Нэша. В симметричном равновесии Нэша:

$$Bid_i = b(X_i). \quad (9.1)$$

- Pay_i — случайная величина, выплата, которую делает игрок i в равновесии Нэша.
- R — случайная величина, доход продавца в равновесии Нэша:

$$R = Pay_1 + Pay_2 + \dots + Pay_n. \quad (9.2)$$

- $Profit_i$ — случайная величина, выигрыш игрока i в равновесии Нэша:

$$Profit_i = V_i \cdot 1_{W_i} - Pay_i. \quad (9.3)$$

- Y_1, \dots, Y_{n-1} — случайные величины X_2, \dots, X_n , упорядоченные по убыванию. В частности, $Y_1 = \max\{X_2, \dots, X_n\}$ и $Y_{n-1} = \min\{X_2, \dots, X_n\}$.

Детерминистические функции:

- $b(\cdot)$ — неслучайная функция, зависимость ставки от сигнала в равновесии Нэша;
- $q(x) = \mathbb{P}(W_1 | X_1 = x)$ — вероятность выигрыша первого игрока, если $X_1 = x$ в равновесии Нэша;
- $pay_1(x) = \mathbb{E}(Pay_1 | X_1 = x)$ — средняя выплата первого игрока, если $X_1 = x$ в равновесии Нэша.

При поиске равновесия Нэша полезно ещё одно обозначение. Мы ищем наилучший ответ первого игрока на действия остальных, поэтому все игроки, кроме первого, используют равновесные стратегии, а первый игрок ставит константу b_1 вне зависимости от сигнала.

- $\pi_1(x, b_1) = \mathbb{E}(Profit_1 | X_1 = x; Bid_1 = b_1)$ — средний выигрыш первого игрока, если $X_1 = x$, он ставит константу b_1 , а остальные игроки используют равновесные стратегии.

Для полного описания моделей нужно сказать, как распределены ценности V_i и какую информацию X_i о ценностях получают игроки. Наиболее популярен анализ двух частных случаев:

1. Частные независимые ценности. Каждый игрок знает, какую ценность товар представляет для него, то есть $X_i = V_i$. Такая ситуация возникает, если товар сложно перепродать вне аукциона или игроки не собираются делать этого. Для простоты ценности предполагают независимыми случайными величинами.
2. Общая ценность. Если товар можно легко перепродать и купить вне аукциона по стабильной цене, то ценность товара для каждого игрока определяется этой рыночной ценой товара. То есть $V_1 = V_2 = V_3 = \dots = V_n = V$. При этом игроки могут не знать этого V . Каждый игрок знает лишь свой сигнал X_i , который зависит от V , но не обязательно ему равен.

В общем случае, который мы проанализируем, не будет ни равенства ценностей, ни независимости сигналов. Но начнем мы со случая частных независимых ценностей.

А теперь давайте найдём оптимальные стратегии игроков и средний доход продавца в трёх моделях.

1.2. Поиск оптимальных стратегий

Кратко напомним предпосылки. Сигнал X_i , который получает игрок i , — это и есть ценность товара для него, то есть $X_i = V_i$. Пусть ценности X_i будут независимыми и равномерными на отрезке $[0; 1]$ случайными величинами. Мы ограничимся поиском симметричного равновесия, то есть равновесия, где все игроки используют одинаковую стратегию. Фактические ставки при этом могут отличаться! Стратегия — это функция $b()$ от ценности, и даже если эти функции $b()$ одиковые, величины $b(X_i)$ будут разными в силу того, что ценности X_i будут разными.

До начала игры игроки ничем не отличаются: у них одинаковый закон распределения ценности товара, поэтому при анализе мы будем изучать поведение первого игрока.

Поехали!

1. Аукцион первой цены.

Предположим, что есть некая равновесная стратегия $b(x)$. Предположим также, что она дифференцируема и возрастает по x .

Первый игрок выигрывает, если его ставка больше всех остальных, то есть $b_1 > Bid_i$ для $i \geq 2$. Обозначим событие, состоящее в том, что первый игрок выиграл буквой W_1 . Его ожидаемый выигрыш равен:

$$\pi_1(x, b_1) = (x - b_1) \mathbb{P}(W_1 | X_1 = x; Bid_1 = b_1). \quad (12.1)$$

Вероятность:

$$\mathbb{P}(W_1 | X_1 = x; Bid_1 = b_1) = \mathbb{P}(b_1 > Bid_2 \cap b_1 > Bid_3 \cap \dots \cap b_1 > Bid_n). \quad (12.2)$$

Наша задача — найти равновесие Нэша, то есть такую ситуацию, когда использование стратегии $b(x)$ является наилучшим действием, если остальные игроки используют такую же стратегию. Поэтому мы предположим, что все игроки, кроме первого, используют стратегию $b(x)$, и найдём условие, при котором первому игроку тоже выгодно её использовать.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(W_1 | X_1 = x; Bid_1 = b_1) &= \\ &= \mathbb{P}(b_1 > b(X_2) \cap b_1 > b(X_3) \cap \dots \cap b_1 > b(X_n)). \end{aligned} \quad (12.3)$$

В силу независимости случайных величин X_i :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(W_1 | X_1 = x; Bid_1 = b_1) &= \\ &= \mathbb{P}(b_1 > b(X_2)) \cdot \mathbb{P}(b_1 > b(X_3)) \cdot \dots \cdot \mathbb{P}(b_1 > b(X_n)). \end{aligned} \quad (12.4)$$

В силу одинакового закона распределения X_i :

$$\mathbb{P}(W_1 | X_1 = x; Bid_1 = b_1) = \mathbb{P}(b_1 > b(X_2))^{n-1}. \quad (12.5)$$

Далее следует начало красивого трюка!

Чудо-замена

Все мы знаем, как делать замену переменных при решении задач. Входит, скажем, в уравнение переменная k , а мы говорим, что вместо k мы будем писать

$\cos(m)$. Или наоборот, входит в уравнение $\cos(m)$, а мы говорим, что вместо $\cos(m)$ будем писать k . Так вот сейчас мы сделаем замену. Мы заменим число b_1 на неизвестную (!) функцию!!

Итак, мы делаем замену $b_1 := b(a)$. С помощью этой замены мы упростим вероятность:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(b_1 > b(X_2))^{n-1} &= \mathbb{P}(b(a) > b(X_2))^{n-1} = \\ &= \mathbb{P}(a > X_2)^{n-1} = \mathbb{P}(X_2 < a)^{n-1} = F(a)^{n-1}.\end{aligned}\quad (13.1)$$

На всякий случай: $F(a) = \mathbb{P}(X_i \leq a)$ — это функция распределения.

И наша прибыль имеет вид:

$$\pi_1 = (x - b(a))(F(a))^{n-1}.\quad (13.2)$$

Вместо максимизации по b_1 нам придется максимизировать по a . Для нахождения оптимальной стратегии первого игрока приравняем производную по a к нулю:

$$\frac{\partial \pi_1}{\partial a} = -b'(a)(F(a))^{n-1} + (x - b(a))(n - 1)F(a)^{n-2}f(a) = 0.\quad (13.3)$$

После упрощения:

$$-b'(a)F(a) + (x - b(a))(n - 1)f(a) = 0.\quad (13.4)$$

Завершение красивого трюка! Мы хотим потребовать, чтобы первому игроку тоже было оптимально использовать стратегию $b(\cdot)$. Ценность товара для первого игрока мы обозначили x , значит, оптимальное b_1 должно равняться $b(x)$. А мы делали замену $b_1 = b(a)$. Значит, в точке оптимума $b(x) = b(a)$, или $x = a$.

$$-b'(x)F(x) + (x - b(x))(n - 1)f(x) = 0.\quad (13.5)$$

Это дифференциальное уравнение можно решить в общем виде, но мы ограничимся нашим равномерным случаем.

Для равномерной случайной на отрезке $[0; 1]$ получаем $f(x) = 1$ и $F(x) = x$:

$$-b'(x)x + (x - b(x))(n - 1) = 0. \quad (13.6)$$

Это линейное дифференциальное уравнение... Его можно решить стандартными методами, скажем, вариацией постоянной, а можно угадать вид решения. Мы пойдем путем угадывания, но я предполагаю, что все могут решить его честно! Раз фигурируют производная и первая степень x , попробуем $b(x) = kx + m$:

$$-kx + (x - kx - m)(n - 1) = 0. \quad (14.1)$$

Собираем коэффициенты при x :

$$-m(n - 1) + x(-k + (1 - k)(n - 1)) = 0. \quad (14.2)$$

Это должно быть тождеством для любого x , значит, $m = 0$ и $-k + (1 - k)(n - 1) = 0$. Находим k , $k = \frac{n-1}{n}$.

Оптимальная стратегия первого и всех остальных игроков: $b(x) = \frac{n-1}{n}x$.

Комментарии:

- а) Так как $\frac{n-1}{n} < 1$, игроки занижают свою истинную ценность в равновесии Нэша. Причем чем меньше игроков, тем сильнее занижаются ставки по сравнению с субъективной ценностью товара.
- б) Можно обойтись без красивого трюка. Для этого можно рассмотреть функцию, обратную к функции $b()$, и применить её внутри вероятности.
- в) В равномерном случае можно обойтись и без дифференциальных уравнений. Для этого достаточно сделать удачную догадку до начала решения. То есть начать со слов: «Предположим, что оптимальная стратегия имеет вид $b(x) = kx + m$ », — и максимизировать по k и m .
- г) Тот, кто попробует честно решить линейное дифференциальное уравнение, обнаружит, что общее решение имеет вид $b(x) = c \cdot x^{-(n-1)} + \frac{n-1}{n}x$. Почему мы берём $c = 0$? Наше дифференциальное уравнение является необходимым условием, полученным в предположении, что $b(x)$ — возрастающая функция. Только решение при $c = 0$ является возрастающим.

- д) Мы проверили только необходимое условие максимума: первая производная равна нулю. Желающие могут взять вторую производную и убедиться, что она меньше нуля, как и положено в максимуме. Позже мы в общем случае докажем, что достаточное условие выполнено.
- е) Мы доказали, что найденная $b(x)$ — единственное симметричное равновесие Нэша, где $b(x)$ — возрастающая функция. Мы не искали равновесия Нэша, где $b(x)$ хотя бы иногда убывает.

Пример 15.1. Решение «в лоб», без чудо-замены.

Начнём с того, что прибыль представима в виде:

$$\pi(x, b_1) = (x - b_1) \mathbb{P}(b(X_2) < b_1)^{n-1}. \quad (15.2)$$

По нашим предположениям функция $b()$ строго возрастает, значит, у неё есть обратная. Обозначим её $b^{-1}()$:

$$\pi(x, b_1) = (x - b_1) \mathbb{P}(X_2 < b^{-1}(b_1))^{n-1} = (x - b_1) F(b^{-1}(b_1))^{n-1}. \quad (15.3)$$

Берём производную по b_1 :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \pi(x, b_1)}{\partial b_1} &= -F(b^{-1}(b_1))^{n-1} + \\ &+ (x - b_1)(n - 1)F(b^{-1}(b_1))^{n-2} f(b^{-1}(b_1)) \cdot \frac{db^{-1}(b_1)}{db_1} = 0. \end{aligned} \quad (15.4)$$

Отсюда как-то неявно выражается b_1 как функция от x . Но мы на самом деле знаем ответ! Мы уже предположили, что ситуация, когда все игроки используют функцию $b()$, — это равновесие Нэша. Значит, если все игроки, кроме первого, используют $b()$, то и первому игроку оптимально её использовать! Следовательно, решением должно являться $b_1 = b(x)$. Поэтому при подстановке $b_1 = b(x)$ должно получаться тождество, верное при любых x .

При подстановке $b_1 = b(x)$ величина $b^{-1}(b_1)$ превращается в x . Собственно, это и есть a при чудо-замене... Получаем дифференциальное уравнение:

$$- F(x)^{n-1} + (x - b(x))(n - 1)F(x)^{n-2} f(x) \left. \frac{db^{-1}(b_1)}{db_1} \right|_{b_1=b(x)} = 0. \quad (15.5)$$

Сокращаем F^{n-2} :

$$-F(x) + (x - b(x))(n - 1)f(x) \left. \frac{db^{-1}(b_1)}{db_1} \right|_{b_1=b(x)} = 0. \quad (15.6)$$

Остаётся вспомнить, что производная обратной функции — это единица, делённая на производную исходной функции, и наше уравнение совпадает с 13.5.

2. Аукцион второй цены. Раз все игроки одинаковые, ограничимся рассмотрением первого игрока. Результат аукциона для него зависит от его собственной ставки и от максимальной ставки остальных игроков. Ценность товара для первого игрока у нас обозначена X_1 . Обозначим максимальную ставку остальных игроков — m . Величину X_1 игрок знает, а m — нет. В наших обозначениях $m = b(Y_1)$, но это не существенно.

Сравним две стратегии первого игрока: $b_1 = X_1$, $b_1 = X_1 + \Delta$. Числа X_1 и $X_1 + \Delta$ разбивают числовую прямую на три интервала. Неизвестное m попадет в один из этих трёх интервалов. Запишем выигрыш первого игрока в таблицу. Если $b_1 < m$, то он ничего не платит и не получает товар. Если $b_1 > m$, то игрок получает товар ценностью X_1 и платит m :

	$m \in (-\infty; X_1)$	$m \in (X_1; X_1 + \Delta)$	$m \in (X_1 + \Delta; +\infty)$
$b_1 = X_1$	$X_1 - m$	0	0
$b_1 = X_1 + \Delta$	$X_1 - m$	$X_1 - m$	0

Мы видим, что в двух случаях из трёх стратегии приносят одинаковый выигрыш. Различие есть, только если $m \in (X_1; X_1 + \Delta)$. Стратегия $b_1 = X_1$ приносит нулевой выигрыш, а стратегия $b_1 = X_1 + \Delta$ приносит выигрыш $X_1 - m < 0$. Значит, стратегия b_1 нестрого доминирует любую стратегию вида $b_1 = X_1 + \Delta$ при $\Delta > 0$. Делать ставку выше своей ценности невыгодно!

Аналогично сравним стратегии $b_1 = X_1$ и $b_1 = X_1 - \Delta$:

	$m \in (-\infty; X_1 - \Delta)$	$m \in (X_1 - \Delta; X_1)$	$m \in (X_1; +\infty)$
$b_1 = X_1$	$X_1 - m$	$X_1 - m$	0
$b_1 = X_1 - \Delta$	$X_1 - m$	0	0

На этот раз разница в выигрышах возникает, если $m \in (X_1 - \Delta; X_1)$. Стратегия $b_1 = X_1$ приносит выигрыш $X_1 - m > 0$. Следовательно, стратегия b_1 нестрого доминирует любую стратегию вида $b_1 = X_1 - \Delta$ при $\Delta > 0$.

Вывод. Существует равновесие Нэша, в котором все игроки используют стратегию $b(x) = x$, то есть правдиво декларируют свои ценности.

Комментарии:

- а) Равномерность распределения нигде не использовалась в решении. Значит, наше рассуждение проходит для любого непрерывного закона распределения X . Почему нам важна непрерывность распределения? Надеюсь, кто-нибудь обратил внимание, что интервалы для m были открытые, мы не рассматривали случай, когда m идеально точно попадает в его границу. Если распределение ценностей непрерывно, то вероятность того, что m будет равняться конкретному числу, равна нулю. Исключив эти случаи из рассмотрения, мы не изменили ожидаемую прибыль первого игрока, а значит, не изменили его оптимальную стратегию.

В случае дискретного распределения доходностей очень важным становится правило, согласно которому распределяется товар, если ставки совпали. В непрерывном случае вероятность совпадения ставок равна нулю, и никакое правило распределения товара при «ничьей» не влияет на оптимальные стратегии.

- б) Также в решении нигде не использовалась независимость X_i . Значит, рассуждение проходит и для зависимых ценностей. Единственное ограничение: вероятность совпадения ценностей должна равняться нулю.

Пример 17.1. Можно решить аукцион второй цены таким же способом, как и аукцион первой цены. В этом случае:

$$\begin{aligned} \pi(x, b_1) &= \mathbb{E}((X_1 - b(Y_1))1_{b_1 > b(Y_1)} | X_1 = x, Bid_1 := b_1) = \\ &= \mathbb{E}((x - b(Y_1))1_{b_1 > b(Y_1)}). \end{aligned} \quad (17.2)$$

Поскольку величины X_i независимы, условное математическое ожидание превратилось в безусловное. Чудо-замена $b_1 = b(a)$ и предположение о возрастании функции $b()$ позволяют упростить выражение:

$$\begin{aligned} \pi(x, b(a)) &= x \mathbb{P}(Y_1 < a) + \mathbb{E}(b(Y_1)1_{Y_1 < a}) = \\ &= x \int_0^a p_{Y_1}(t) dt - \int_0^a b(t) p_{Y_1}(t) dt. \end{aligned} \quad (17.3)$$

Берём производную по a :

$$\frac{\partial \pi(x, b(a))}{\partial a} = x p_{Y_1}(a) - b(a) p_{Y_1}(a). \quad (17.4)$$

Мы предположили, что $b(\cdot)$ — это равновесная стратегия, значит, при ценности x игроку должно быть оптимально ставить $b_1 = b(x)$. Кроме того, мы делали замену $b_1 = b(a)$. Значит, производная обращается в ноль при $a = x$:

$$xp_{Y_1}(x) - b(x)p_{Y_1}(x) = 0. \quad (18.1)$$

И отсюда мы получаем решение $b(x) = x$.

Недостаток этого способа в том, что он говорит, только что $b(x) = x$ — равновесие Нэша. А способ с доминированием стратегий говорит, что это не просто равновесие, а равновесие в нестрогих доминирующих стратегиях.

3. Кнопочный аукцион.

Снова рассмотрим первого игрока. Если он видит, например, что другие игроки долго дают свои кнопки, он может сделать вывод, что их ценности товара высоки. Наблюдая за другими, он получает информацию о них, но не о себе! Его ценность не зависит от их ценностей! Ситуация резко изменится, когда мы будем рассматривать зависимые ценности в следующих лекциях. А пока наблюдение за другими не дает нашему игроку никакой полезной информации, кроме того, остался ли он уже один в игре или ещё нет.

Естественно, как только игрок остался один в игре, победитель сразу определён. Следовательно, стратегия игрока не зависит от того, сколько ещё игроков осталось, кроме него: ещё двое или трое, или семеро — никакой разницы. Таким образом, ещё до начала аукциона, узнав свою ценность X , игрок может уже спланировать свои действия: «я буду давить на кнопку до тех пор, пока цена не дойдет до некоей цены b или пока я не выиграю аукцион».

Итак, действия игрока описывается его числом b_i . Представим теперь, что игроки просто пишут свои b_i на бумажках, а на кнопки дают роботы, согласно этим b_i . Кто победит на аукционе? Победит тот, кто написал наибольшее b_i . А сколько он заплатит? Он заплатит вторую по величине ставку b_i !

Получается, что при независимых ценностях кнопочный аукцион полностью эквивалентен аукциону второй цены. А его мы уже решали. Оптимальная стратегия: $b(x) = x$.

Когда ценности будут коррелированы, кнопочный аукцион будет отличаться от аукциона второй цены.

1.3. Теорема об одинаковой доходности

Чтобы не повторяться, введём:

Определение 19.0. Закон распределения случайной величины X назовём **регулярным**, если существуют такие числа a и b , что функция распределения F строго возрастает и непрерывна на отрезке $[a; b]$, $F(a) = 0$ и $F(b) = 1$.

В этой книге мы всегда рассматриваем регулярное распределение на отрезке $[0; 1]$. Это несколько нас не ограничивает, так как вопрос выбора начала и конца отрезка — это вопрос выбора масштаба, в котором измеряются денежные суммы. Может быть, «один» — это один миллион рублей. Зато обозначения становятся проще.

Теорема 19.1. *Теорема об одинаковой доходности. Revenue equivalence theorem.*

Рассмотрим следующие предпосылки:

RE1. На аукционе выставлен один товар.

RE2. За право получить товар торгуются n игроков.

RE3. Ценности товара для разных игроков одинаково распределены и независимы.

RE4. Ценности имеют регулярное распределение на отрезке $[0; 1]$.

RE5. В равновесии товар достаётся тому игроку, для которого он ценнее всего.

RE6. В равновесии средний выигрыш игрока с минимальной ценностью (у нас с нулевой ценностью) равен нулю.

RE7. Покупатели нейтральны к риску.

Если аукцион удовлетворяет предпосылкам RE1—RE7, то средний доход продавца не зависит от конкретного механизма проведения аукциона.

Доказательство. Доказательство состоит из трёх шагов. Двух простых и третьего, позапутанное, — связанного с теоремой об огибающей...

Шаг 1. Рассмотрим игрока с ценностью x . Какова вероятность того, что он выигрывает аукцион? Из требования RE5 следует, что это вероятность того, что ценность остальных игроков ниже x . Применяя требования RE1—RE4, получаем, что искомая вероятность, обозначим её $q(x)$, равна

$$q(x) = F(x)^{n-1}.$$

Шаг 2. Заметим, что средняя выручка продавца — это сумма средних платежей всех игроков.

Шаг 3. Оказывается, что средний платеж игрока однозначно выводится из вероятности, упомянутой в шаге 1, и условия RE6. А именно мы докажем, что средняя выплата игрока определяется по формуле:

$$pay(x) = xq(x) - \int_0^x q(t) dt. \quad (20.1)$$

Доказательство на самом деле занимает две или три строчки, но перед ними нужно ввести кучу обозначений. Итак...

Мы выбрали конкретного игрока. Рассмотрим ситуацию, в которой остальные игроки используют равновесные стратегии. Вероятность того, что наш игрок выигрывает аукцион, зависит только от его ставки b , так как стратегии остальных зафиксированы. Обозначим её $\widehat{q}(b)$. Если игрок выигрывает аукцион, то он что-то платит, причём необязательно свою ставку! Если не выигрывает, то ничего не платит. Среднее значение этого платежа опять же зависит только от его ставки b , обозначим его $\widehat{pay}(b)$.

Средний выигрыш игрока определяется по формуле:

$$\pi(x, b) = x\widehat{q}(b) - \widehat{pay}(b). \quad (20.2)$$

У игрока есть равновесная стратегия $b(x)$, которая по определению равновесия Нэша является наилучшим ответом на действия других игроков.

При подстановке этой наилучшей стратегии $b(x)$ вместо b мы получаем определения трёх новых функций:

$$q(x) := \widehat{q}(b(x));$$

$$pay(x) = \widehat{pay}(b(x));$$

$$\pi^*(x) = \pi(x, b(x)) = xq(x) - pay(x).$$

Для ясности: единственная разница между функциями $\widehat{q}()$ и $q()$ состоит в том, что первая зависит от ставки, а вторая — от ценности. Повесив на стену столько ружей, пора стрелять!

Находим производную:

$$\frac{d\pi^*(x)}{dx} = \frac{d\pi(x, b(x))}{dx} = \frac{\partial \pi}{\partial x} + \frac{\partial \pi}{\partial b} \frac{db}{dx}. \quad (20.3)$$

А теперь вспомним, что оптимальная стратегия $b(x)$ находится из условия $\frac{\partial \pi}{\partial b} = 0$. Значит:

$$\frac{d\pi^*(x)}{dx} = \left. \frac{\partial \pi}{\partial x} \right|_{b=b(x)}. \quad (21.1)$$

Это, между нами говоря, была теорема об огибающей. Упрощаем производную:

$$\left. \frac{\partial \pi(x, b)}{\partial x} \right|_{b=b(x)} = \widehat{q}(b)|_{b=b(x)} = q(x). \quad (21.2)$$

Вот и всё! Кстати, это имеет легкую смысловую интерпретацию. Частная производная говорит нам, что случится с ожидаемым выигрышем, если мы будем менять ценность x , но не будем менять стратегию b . Не меняя стратегии, мы не влияем на вероятность выигрыша и на наш средний платеж организаторам аукциона. Естественно, мы должны получить вероятность выигрыша.

Осталось записать выражение в интегральной форме:

$$\pi^*(x) = \pi^*(0) + \int_0^x q(t) dt. \quad (21.3)$$

Условие RE6 говорит, что $\pi^*(0) = 0$, и мы можем увидеть, что:

$$xq(x) - pay(x) = \int_0^x q(t) dt. \quad (21.4)$$

Что и требовалось доказать. □

Примечания.

1. Теорема говорит только о равенстве среднего дохода. Она не говорит, что доход продавца при данных конкретных ценностях покупателей не зависит от формы аукциона.
2. Теорема не говорит, что равновесие, в котором игрок с наивысшей ценностью получает товар, существует. Она, наоборот, опирается на существование такого равновесия: если такое равновесие есть, то средний доход продавца не зависит от формы проведения аукциона. Поэтому использовать теорему нужно аккуратно.

Если в аукционе товар достаётся тому, кто сделал наибольшую ставку, то часто помогает следующая цепочка рассуждений. Предположим, что равновесие,

в котором товар достаётся игроку с наибольшей ценностью, существует. Тогда мы можем использовать теорему. Она нам поможет, сейчас мы на примере это увидим, найти равновесную стратегию. Затем мы проверяем, что эта равновесная стратегия $b(x)$ является возрастающей функцией по x . И мы, подобно барону Мюнхаузену, вытащили сами себя за волосы! Если по правилам аукциона товар достаётся сделавшему наибольшую ставку, а наибольшая ставка соответствует наибольшей ценности, значит, теорему можно было применять!

Наши три модели удовлетворяют условиям теоремы, поэтому средний доход продавца в них одинаковый:

$$\mathbb{E}(R^B) = \mathbb{E}(R^{FP}) = \mathbb{E}(R^{SP}).$$

Средний доход продавца равен n , умноженному на среднюю выплату от первого игрока продавцу, поэтому воспользуемся формулой для средней выплаты от игрока продавцу:

$$pay(x) = xq(x) - \int_0^x q(t) dt.$$

При равномерном распределении ценностей, то есть $q(x) = F(x)^{n-1} = x^{n-1}$:

$$pay(x) = \frac{n-1}{n} x^n. \quad (22.1)$$

Воспользуемся равномерностью второй раз:

$$\mathbb{E}(pay(X_1)) = \mathbb{E}\left(\frac{n-1}{n} X_1^n\right) = \frac{n-1}{n} \int_0^1 t^n dt = \frac{n-1}{n(n+1)}. \quad (22.2)$$

Умножаем на n и получаем:

$$\mathbb{E}(R^B) = \mathbb{E}(R^{FP}) = \mathbb{E}(R^{SP}) = \frac{n-1}{n+1}. \quad (22.3)$$

А сейчас мы с помощью этой теоремы в два счета получим решение аукциона первой цены не только для равномерного случая.

Пример 22.4. Решение аукциона первой цены для случай произвольного регулярного распределения ценностей.

Предположим, что есть некое равновесие и теорему об эквивалентности доходностей можно применять. На аукционе первой цене средний платеж игрока равен его ставке, помноженной на вероятность выигрыша:

$$p_{ay}(x) = b(x)q(x). \quad (22.5)$$

Таким образом, уравнение 20.1 имеет вид:

$$xq(x) - b(x)q(x) = \int_0^x q(t) dt. \quad (23.1)$$

Отсюда мы находим оптимальную стратегию:

$$b(x) = x - \frac{\int_0^x q(t) dt}{q(x)}. \quad (23.2)$$

Напомним, что условия RE1–RE5 говорят нам, что $q(x) = F(x)^{n-1}$. Это и есть решение аукциона первой цены для произвольной регулярной F .

Остаётся проверить, что теореме можно было применять! Берём производную $\frac{db(x)}{dx}$ и убеждаемся, что она строго положительна!

Можно проверить, что при подстановке $F(t) = t$ на отрезке $[0; 1]$ мы получаем наш результат для равномерно распределенных ценностей.

1.4. Пример с коррелированными ценностями

Сравним на примере доходы аукциона первой и второй цены при коррелированных ценностях.

В аукционе участвуют два игрока. Предположим, что совместная функция плотностей на множестве $x_1, x_2 \in [0; 1]$ имеет вид:

$$f(x_1, x_2) = x_1 + x_2. \quad (23.3)$$

Наша задача найти равновесие Нэша для аукциона первой и для аукциона второй цены, а также среднюю выручку продавца.

1. Аукцион первой цены. Считаем ожидаемый выигрыш первого игрока, если его ценность равна x , а ставит он b_1 . Отличие от формулы 12.1 состоит в том, что знание x содержит в себе информацию о ценности и, следовательно, о ставке второго игрока. Поэтому мы используем условную вероятность:

$$\pi_1(x, b_1) = (x - b_1) \mathbb{P}(b_1 > Bid_2 | X_1 = x). \quad (23.4)$$

Предположим, что существует симметричное равновесие Нэша, в котором все игроки делают ставки согласно функции $b(x)$. Предположим, что эта функция дифференцируема и возрастает по x .

Снова рассмотрим ситуацию, в которой все игроки, кроме первого, используют функцию $b(\cdot)$ для своих ставок, и найдём оптимальное поведение первого игрока. В нашем частном случае «все остальные» — это только второй игрок, то есть $Bid_2 = b(X_2)$.

Снова сделаем магическую замену b_1 на пока неизвестную функцию $b(a)$. В силу предположения о возрастании $b(x)$ условие $b(a) > b(X_2)$ равносильно тому, что $a > X_2$.

После магической подстановки наша прибыль имеет вид:

$$\pi_1 = (x - b(a)) \mathbb{P}(a > X_2 | X_1 = x) \quad (24.1)$$

Чтобы брать производную по a , вспомним немного теорию вероятностей.

Из совместной функции плотности $f(x_1, x_2)$ можно найти всё, что нам нужно. Сначала находим частную функцию плотности X_1 :

$$f_{X_1}(x_1) := \int_0^1 f(x_1, x_2) dx_2. \quad (24.2)$$

Взяв интеграл, в нашем случае получаем $f_{X_1}(x_1) = \frac{1}{2} + x_1$.

А затем находим и условную функцию плотности по принципу:

$$f(x_2|x_1) := \frac{f(x_1, x_2)}{f_{X_1}(x_1)}. \quad (24.3)$$

Условная функция плотности имеет вид $f(x_2|x_1) = \frac{x_1+x_2}{1/2+x_1}$.

Из условной функции плотности можно получить условную функцию распределения:

$$F(x_2|x_1) := \int_0^{x_2} f(t|x_1) dt. \quad (24.4)$$

В нашем случае получаем $F(x_2|x_1) := \frac{x_1 x_2 + x_2^2/2}{1/2 + x_1}$.

Но ведь $\mathbb{P}(X_2 < a | X_1 = x)$ — это и есть условная функция распределения, $F_{X_2|X_1}(a|x)$.

Значит, наша прибыль в вероятностных терминах записывается как

$$\pi_1 = (x - b(a))F_{X_2|X_1}(a|x). \quad (25.1)$$

Берём производную по a и приравниваем к нулю:

$$\frac{\partial \pi_1}{\partial a} = -b'(a)F_{X_2|X_1}(a|x) + (x - b(a))f_{X_2|X_1}(a|x) = 0. \quad (25.2)$$

Снова завершаем магический трюк. Мы должны потребовать, чтобы оптимальной стратегией первого игрока была бы функция $b_1 = b(x)$. Но мы использовали замену $b_1 = b(a)$, значит, $x = a$:

$$-b'(x)F_{X_2|X_1}(x|x) + (x - b(x))f_{X_2|X_1}(x|x) = 0. \quad (25.3)$$

В результате мы получили дифференциальное уравнение:

$$b'(x) = (x - b(x)) \frac{f_{X_2|X_1}(x|x)}{F_{X_2|X_1}(x|x)}. \quad (25.4)$$

В нашем частном случае: $f(x|x) = \frac{2x}{1/2+x}$, $F(x|x) = \frac{1.5x^2}{1/2+x}$.

Получаем дифференциальное уравнение:

$$b' = (x - b(x)) \frac{4}{3x}. \quad (25.5)$$

Мы же везунчики, правда, у него будет линейное решение?

Можно подбором получить $b(x) = \frac{4}{7}x$.

Если же решать честно, то общее решение имеет вид $b(x) = c \cdot x^{-4/3} + \frac{4}{7}x$. Но мы ищем стратегию, которая возрастает по x , поэтому $c = 0$.

Настала очередь дохода продавца. Он равен удвоенной ожидаемой выплате первого игрока. Первый игрок платит $\frac{4}{7}X_1$, только если $X_1 > X_2$. Значит:

$$\mathbb{E}(R^{FP}) = 2 \mathbb{E} \left(\frac{4}{7}X_1 \cdot 1_{X_1 > X_2} \right). \quad (25.6)$$

Задача свелась к двойному интегралу:

$$\mathbb{E}\left(\frac{4}{7}X_1 \cdot 1_{X_1 > X_2}\right) = \int_0^1 \int_0^{x_1} \frac{4}{7}x_1 f(x_1, x_2) dx_2 dx_1. \quad (25.7)$$

Подставляем функцию плотности и после взятия интеграла получаем:

$$\mathbb{E}(R^{FP}) = \frac{3}{7} \approx 0.4286. \quad (26.1)$$

2. Аукцион второй цены. Логика решения такая же, как и в случае независимых ценностей. Рассматриваем поведение первого игрока. Поскольку игроков всего два, $m = b_2$. Отличие от случая с независимыми ценностями состоит в том, что случайные величины m и X_1 зависимы. Но этот факт никак не влияет на логику решения. Поэтому снова оказывается, что стратегия $b_1 = X_1$ нестрого доминирует любую другую стратегию первого игрока.

Считаем ожидаемый доход продавца. Он равен удвоенной ожидаемой выплате первого игрока. Первый игрок платит X_2 , только если $X_1 > X_2$. Значит:

$$\mathbb{E}(R^{SP}) = 2 \mathbb{E}(X_2 \cdot 1_{X_1 > X_2}). \quad (26.2)$$

Задача свелась к двойному интегралу:

$$\mathbb{E}(X_2 \cdot 1_{X_1 > X_2}) = \int_0^1 \int_0^{x_1} x_2 f(x_1, x_2) dx_2 dx_1. \quad (26.3)$$

Подставляем функцию плотности и после взятия интеграла получаем:

$$\mathbb{E}(R^{SP}) = 5/12 \approx 0.4167. \quad (26.4)$$

Таким образом, для данного совместного распределения доходностей аукционной первой и второй цены не одинаково выгодно для продавца! Мы исследуем подробнее случай связанных доходностей позже.

1.5. Задачи

- В моделях аукциона первой и второй цены с независимыми, равномерными на $[0; 1]$ ценностями покупателей приведите примеры:
 - вектора ценностей, при котором для продавца лучше аукцион первой цены;
 - вектора ценностей, при котором для продавца лучше аукцион второй цены.
- Рассмотрите покупателей с независимыми ценностями, имеющими функцию плотности $f(x) = 2x$ на отрезке $[0; 1]$. Найдите в явном виде оптимальные стратегии и среднюю прибыль продавца.
- Докажите, что формулу $pay(x) = xq(x) - \int_0^x q(t)dt$ можно представить в виде:

$$pay(x) = pay(0) + \int_0^x t \cdot \frac{dq(t)}{dt} dt. \quad (27.1)$$

- Аукцион «Платят все!». Покупатели одновременно делают ставки. Товар достаётся тому, кто назвал наибольшую ставку, но платят все игроки. Каждый платит свою ставку. Ценности товара для покупателей имеют независимое регулярное распределение с функцией распределения $F()$.

Используя трюк с теоремой об одинаковых доходностях (см. пример 22.4), найдите оптимальные стратегии игроков, $b(x)$.

Какой вид имеют оптимальные стратегии, если X_i равномерны на $[0; 1]$? Чему в этом случае будет равен ожидаемый доход продавца?

- Наследство. Двум сыновьям достался земельный участок в наследство. Отец не хотел, чтобы участок был разделен, поэтому по завещанию установлены следующие правила: два брата одновременно делают ставки. Участок получает тот, кто сделал бóльшую ставку. При этом получивший участок выплачивает свою ставку проигравшему. Найдите равновесие Нэша, если ценности участка независимы и равномерны на $[0; 1]$.
- Аукцион «Победитель платит чужую среднюю». Покупатели одновременно делают ставки. Товар достаётся тому, кто назвал наибольшую ставку. Победитель платит среднюю арифметическую ставок остальных игроков. Ценности товара для покупателей независимы и равномерно распределены на $[0; 1]$. Найдите оптимальные стратегии игроков, $b(x)$, средний доход продавца.

Подсказка: может быть, у дифференциального уравнения есть простое линейное решение?

7. Аукцион с дискретными ценностями. В аукционе участвуют два покупателя. Ценности товара для покупателей независимы и имеют дискретное распределение: X_i равновероятно принимает значения 0 и 1. Аукцион проходит по следующим правилам: продавец предлагает товар по цене a , где a — это некая константа, $a \in (0; 2/3)$. Игроки одновременно решают, подходит ли им эта цена или нет. Если один сказал «да», а другой «нет», то товар достаётся тому, кто сказал «да», и он платит величину a . Если оба сказали «нет», то товар отдаётся бесплатно случайно выбираемому игроку. Если оба сказали «да», то товар отдаётся по цене a случайно выбираемому игроку.

- Найдите хотя бы одно равновесие Нэша.
- Зависит ли равновесный доход аукциониста от a ? Применима ли теорема об одинаковой доходности и почему?
- При каком a доход продавца будет максимальным?

Подсказка для тех, кто забыл теорию игр ☹. Во-первых, равновесия бывают в смешанных стратегиях, во-вторых, чистых стратегий у каждого игрока здесь четыре. Стратегия — это функция от ценности, значит, у игрока есть, например, стратегия «если $X = 0$, то говорю “нет”, если $X = 1$, то говорю “да”».

Ещё подсказка: если задача кажется слишком сложной, решите её для конкретного a , скажем, для $a = 0.1$, а затем попробуйте снова. Это, кстати, один из немногих универсальных приемов решения всех задач: «Я не хочу решать эту задачу, поэтому буду решать более простую!»

1.6. Решения задач

- В качестве примера возьмём аукцион двух игроков.
 - Если $X_1 = 0.2$, $X_2 = 0.6$, то на аукционе второй цены продавец получит 0.2 (вторую по величине ставку), а на аукционе первой цены продавец получит 0.3 (так как оптимальная стратегия имеет вид $b(x) = \frac{n-1}{n}x = \frac{1}{2}x$).
 - Если $X_1 = 0.4$, $X_2 = 0.6$, то на аукционе второй цены продавец получит 0.4 (вторую по величине ставку), а на аукционе первой цены продавец

получит 0.3 (так как оптимальная стратегия имеет вид $b(x) = \frac{n-1}{n}x = \frac{1}{2}x$).

2. Подставляем $F(x) = x^2$, значит, $q(x) = (x^2)^{n-1} = x^{2n-2}$. Подставляем $q(x)$ в 23.2. Получаем $b(x) = \frac{2n-2}{2n-1}x$.

Полученную $b(x)$ подставляем в 22.5. Получаем $pay(x) = \frac{2n-2}{2n-1}x^{2n-1}$.

Считаем ожидаемую выплату первого игрока:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(pay(X_1)) &= \int_0^1 pay(t)f(t) dt = \int_0^1 \frac{2n-2}{2n-1}t^{2n-1} \cdot 2t dt = \\ &= \frac{4(n-1)}{(2n-1)(2n+1)}. \end{aligned} \quad (29.1)$$

И умножаем на число игроков:

$$\mathbb{E}(R^{FP}) = \frac{4n(n-1)}{(2n-1)(2n+1)}. \quad (29.2)$$

3. Используем формулу интегрирования по частям.
 4. Используем уравнение из теоремы об одинаковой доходности

$$xq(x) - pay(x) = \int_0^x q(t) dt. \quad (29.3)$$

В данном случае $pay(x) = b(x)$, так как ставка платится вне зависимости от того, кому достанется товар. Значит:

$$b(x) = xq(x) - \int_0^x q(t) dt, \quad (29.4)$$

где $q(x) = F(x)^{n-1}$.

Можно решить и по-другому, явно выписав задачу максимизации игрока и получив дифференциальное уравнение.

5. Эта игра — не аукцион в чистом виде, так как игрок тоже может получить деньги. Выписываем прибыль первого игрока:

$$\pi_1 = (x - b_1) \mathbb{P}(b(X_2) < b_1) + \mathbb{E}(b(X_2) \cdot 1_{b(X_2) > b_1}). \quad (29.5)$$

Прибавка в прибыли — это ожидаемый платеж от второго игрока первому.

После чудо-замены:

$$\pi_1 = (x - b(a)) \mathbb{P}(X_2 < a) + \mathbb{E}(b(X_2) \cdot 1_{X_2 > a}). \quad (29.6)$$

Запишем математическое ожидание в виде интеграла:

$$\pi_1 = (x - b(a))F(a) + \int_a^1 b(t)f(t) dt. \quad (30.1)$$

После взятия производной по a :

$$-b'(a)F(a) + (x - b(a))f(a) - b(a)f(a) = 0. \quad (30.2)$$

Требуем оптимальности стратегии $b_1 = b(x)$:

$$-b'(x)F(x) + (x - b(x))f(x) - b(x)f(x) = 0. \quad (30.3)$$

Для равномерного случая получаем:

$$-b'(x)x + x - b(x) - b(x) = 0. \quad (30.4)$$

Находим общее решение и замечаем, что $c = 0$, или сразу подбираем линейное решение $b(x) = kx$:

$$-kx + x - 2kx = 0. \quad (30.5)$$

Получаем $k = 1/3$ и равновесие Нэша вида $b(x) = x/3$.

6. Победа первого игрока, событие $W_1 = \{b(X_2) < b_1 \cap \dots \cap b(X_n) < b_1\}$. Чудо-замена $b_1 = b(a)$ позволяет упростить его до $W_1 = \{X_2 < a \cap \dots \cap X_n < a\}$.

Функция прибыли:

$$\pi_1 = \left(x - \mathbb{E} \left(\frac{b(X_2) + \dots + b(X_n)}{n-1} \middle| W_1 \right) \right) \cdot \mathbb{P}(W_1). \quad (30.6)$$

В силу того, что X_i одинаково распределены и независимы, $\mathbb{P}(W_1) = F(a)^{n-1}$ и:

$$\pi_1 = (x - \mathbb{E}(b(X_2)|X_2 < a)) \cdot F(a)^{n-1}. \quad (30.7)$$

Воспользуемся тем, что $\mathbb{E}(b(X_2)|X_2 < a) \cdot \mathbb{P}(X_2 < a) = \mathbb{E}(b(X_2) \cdot 1_{X_2 < a})$:

$$\pi_1 = x \cdot F(a)^{n-1} - \mathbb{E}(b(X_2) \cdot 1_{X_2 < a}) \cdot F(a)^{n-2}. \quad (30.8)$$

Заметим, что математическое ожидание равно интегралу:

$$\mathbb{E}(b(X_2) \cdot 1_{X_2 < a}) = \int_0^a b(t) f(t) dt. \quad (31.1)$$

Стало быть, производная от математического ожидания равна:

$$\frac{d \mathbb{E}(b(X_2) \cdot 1_{X_2 < a})}{da} = b(a) f(a). \quad (31.2)$$

Теперь легко находим производную прибыли:

$$\begin{aligned} \pi_1 = & F(a)^{n-1} + x \cdot (n-1)F(a)^{n-2}f(a) - \\ & - \mathbb{E}(b(X_2) \cdot 1_{X_2 < a}) \cdot (n-2)F(a)^{n-3}f(a) - b(a)f(a)F(a)^{n-2}. \end{aligned} \quad (31.3)$$

Приравняв к нулю и завершив чудо-замену замечанием, что $a = x$, получаем уравнение:

$$(n-1)x F(x) f(x) - (n-2) \int_0^x b(t) f(t) dt f(x) - b(x) f(x) F(x) = 0. \quad (31.4)$$

Мы получили интегральное уравнение, то есть уравнение с интегралами, а не с производными. Но его можно свести к дифференциальному, сделав замену $y(x) = \int_0^x b(t) f(t) dt$, тогда $b(x) f(x) = y'(x)$. В общем виде дальше мы его решать не будем, а вспомним, что у нас $f(x) = 1$ и $F(x) = x$:

$$(n-1)x^2 - (n-2) \int_0^x b(t) dt - b(x)x = 0. \quad (31.5)$$

Вместо возможной замены $y(x) = \int_0^x b(t) dt$ мы возьмём производную от обеих частей уравнения:

$$(n-1)2x - (n-2)b(x) - b(x) - b'(x)x = 0. \quad (31.6)$$

Далее есть два варианта действий. Либо найти общее решение и заметить, что нужно взять $c = 0$, либо подобрать линейное решение $b(x) = kx$:

$$(n-1)2x - (n-2)kx - kx - kx = 0. \quad (32.1)$$

Получаем $k = \frac{2(n-1)}{n}$ и равновесие Нэша со стратегиями вида $b(x) = \frac{2(n-1)}{n}x$. Кстати, при $n = 2$ мы получаем аукцион второй цены, а наше решение, как и следует, даёт $b(x) = x$.

Альтернативное решение по принципу «Мне повезёт и без дифуров»:

А вдруг оптимальная стратегия линейна, то есть имеет вид $b(x) = kx$? Подставим эту функцию сразу в прибыль, до чудо-замены:

$$\pi_1 = \left(x - \mathbb{E} \left(\frac{kX_2 + \dots + kX_n}{n-1} \mid kX_2 < b_1 \cap \dots \cap kX_n < b_1 \right) \right) \cdot \mathbb{P}(kX_2 < b_1 \cap \dots \cap kX_n < b_1). \quad (32.2)$$

Упрощаем математическое ожидание и вероятность:

$$\pi_1 = \left(x - k \mathbb{E}(X_2 | X_2 < b_1/k) \right) \cdot \mathbb{P}(X_2 < b_1/k \cap \dots \cap X_n < b_1/k). \quad (32.3)$$

Теперь условное математическое ожидание легко считается. Условие $X_2 < b_1/k$ и априорная равномерность X_2 равносильны тому, что X_2 равномерно на $[0; b_1/k]$. Следовательно, $\mathbb{E}(X_2 | X_2 < b_1/k) = \frac{b_1}{2k}$. Получаем уравнение

$$\pi_1 = \left(x - \frac{b_1}{2} \right) \cdot (b_1/k)^{n-1}. \quad (32.4)$$

Без чудо-замены берём производную по b_1 . То есть сразу ищем оптимальную ставку:

$$k^{1-n} \left(\left(x - \frac{b_1}{2} \right) \cdot (n-1)b_1^{n-2} - \frac{1}{2}b_1^{n-1} \right) = 0. \quad (32.5)$$

Выражаем b_1 и получаем $b_1 = \frac{2(n-1)}{n}x$. Поскольку она имеет предположенный вид, то все шаги были верными.

Считаем средний доход продавца. Поскольку все условия теоремы об одинаковой доходности выполнены, то ответ совпадает с найденным в лекции для аукциона первой цены:

$$\mathbb{E}(R^{MO}) = \frac{n-1}{n+1}. \quad (33.1)$$

7. Произвольная смешанная стратегия имеет вид: если $X = 0$, то говорить «да» с вероятностью p_0 ; если $X = 1$, то говорить «да» с вероятностью p_1 .

Пусть моя ценность равна 0. Если я скажу «нет», то ничего не заплачу и, возможно, получу товар с нулевой для меня ценностью, значит, мой ожидаемый выигрыш равен 0. Если я скажу «да», то с положительной вероятностью мне придется платить a , и мой ожидаемый выигрыш меньше 0. Значит, если ценность равна нулю, оптимально говорить «нет». То есть $p_0 = 0$.

Пусть моя ценность равна 1. Если я скажу «нет», то получу в среднем:

$$(1 - 0.5p_1) \cdot \frac{1}{2}. \quad (33.2)$$

Если я скажу «да», то получу в среднем:

$$(1 - 0.5p_1) \cdot (1 - a) + 0.5p_1 \cdot \frac{1 - a}{2}. \quad (33.3)$$

Чтобы смешанная стратегия была оптимальной, мне нужно быть безразличным между чистыми стратегиями, так как иначе я выбрал бы чистую. Приравниваем эти два выигрыша и находим p_1 .

Формально получается $p_1 = 4 - \frac{2}{a}$. Возникает несколько случаев...

Если $a \in (0; 1/2)$, то равенство достигается только при $p_1 < 0$. Это означает, что при всех $p_1 \in [0; 1]$ говорить «да» выгоднее, чем «нет». Следовательно, в равновесии каждый игрок использует стратегию: «Если $x = 0$, то «нет», если $x = 1$, то «да»».

Если $a \in (1/2; 2/3)$, то равенство достигается только при $p_1 = 4 - \frac{2}{a}$. В равновесии каждый игрок использует стратегию: «Если $x = 0$, то “нет”, если $x = 1$, то “да” с вероятностью $p_1 = 4 - \frac{2}{a}$ ».

Рассмотрим случай $a = 1/2$. Если $x = 1$, то «да» лучше, чем «нет», при $p_1 \in (0; 1]$ и игрок безразличен между «да» и «нет» при $p_1 = 0$. Получаем равновесие с парой стратегий: «Если $x = 0$, то “нет”, если $x = 1$, то “да”». И ещё одно равновесие с парой стратегий: «Всегда “нет”».

1.7. Контрольная работа 1

1. Предположим, что условия теоремы об одинаковых доходностях выполнены.
 - а) Может ли выбор механизма проведения аукциона влиять на ковариацию выплат двух разных игроков?
 - б) Найдите ковариацию выплат первого и второго игроков на аукционе первой цены с независимыми и равномерными на $[0; 1]$ ценностями. Подсказка: можно пользоваться тем, что средняя выплата равна $\frac{n-1}{n(n+1)}$.

2. «Наследство» по типу аукциона второй цены.

Двум сыновьям достался земельный участок в наследство. Отец не хотел, чтобы участок был разделен, поэтому по завещанию установлены следующие правила: два брата одновременно делают ставки. Участок получает тот, кто сделал большую ставку. При этом получивший участок выплачивает проигравшему меньшую из двух ставок. Ценности участка для игроков независимы и равномерны на $[0; 1]$.

Найдите равновесие Нэша.

3. Рассмотрим аукцион второй цены. Предположим, что ценности независимы и имеют регулярное распределение. Агенты не нейтральны к риску. Их отношение к риску отражается функцией полезности $u(\cdot)$. Про функцию $u(\cdot)$ известно, что она непрерывна, строго возрастает и для удобства отмасштабирована, $u(0) = 0$. Если игрок получает товар ценностью x и платит продавцу m , то его полезность равна $u(x - m)$.

Найдите равновесие Нэша.

4. Рассмотрим аукцион второй цены с резервной ставкой r . Резервная ставка — это минимальная цена, за которую продавец согласен расстаться с товаром.

Если все игроки сделали ставки ниже r , товар остаётся у продавца, никто ничего не платит. Если хотя бы один игрок сделал ставку выше r , то товар достаётся игроку, сделавшему самую высокую ставку, и платит он максимум между второй по величине ставкой и r . Константа r общеизвестна всем игрокам. Ценности независимы и имеют регулярное распределение. Агенты нейтральны к риску.

Найдите равновесие Нэша.

5. Рассмотрим аукцион первой цены с двумя игроками. Ценности независимы и равномерны на $[0; 1]$. Но ставку можно сделать только 0 или 0.5. Если ставки игроков совпали, то товар достаётся случайно выбираемому игроку за соответствующую плату.

Найдите равновесие Нэша.

1.8. Решение контрольной работы 1

1.

$$\text{Cov}(Pay_1, Pay_2) = \mathbb{E}(Pay_1 \cdot Pay_2) - \mathbb{E}(Pay_1) \mathbb{E}(Pay_2). \quad (35.1)$$

На вычитаемое способ аукциона влиять не может в силу теоремы об одинаковой доходности. Сосредоточимся на $\mathbb{E}(Pay_1 \cdot Pay_2)$. В аукционе первой цены никакие два игрока не могут платить одновременно, поэтому произведение выплат всегда равно нулю, то есть $\mathbb{E}(Pay_1 \cdot Pay_2) = 0$. В аукционе «Платят все» произведение выплат строго положительно, поэтому $\mathbb{E}(Pay_1 Pay_2) > 0$. Значит, способ проведения аукциона может влиять на ковариацию.

2. Ожидаемая прибыль:

$$\begin{aligned} \pi(x, b_1) = (x - \mathbb{E}(b(X_2)|b(X_2) < b_1)) \cdot \mathbb{P}(b(X_2) < b_1) + \\ + b_1 \mathbb{P}(b(X_2) > b_1). \end{aligned} \quad (35.2)$$

После чудо-замены $b_1 = b(a)$ и упрощения вероятностей:

$$\pi = (x - \mathbb{E}(b(X_2)|X_2 < a)) \mathbb{P}(X_2 < a) + b(a)(1 - \mathbb{P}(X_2 < a)), \quad (35.3)$$

и

$$\pi = xF(a) - \mathbb{E}(b(X_2) \cdot 1_{X_2 < a}) + b(a)(1 - F(a)). \quad (35.4)$$

В записи с интегралом:

$$\pi = xF(a) - \int_0^a b(t)f(t) dt + b(a)(1 - F(a)). \quad (35.5)$$

Приравниваем производную к нулю:

$$xf(a) - b(a)f(a) - b(a)f(a) + b'(a)(1 - F(a)) = 0. \quad (36.1)$$

Для случая равномерного распределения:

$$x - 2b(x) + b'(x)(1 - x) = 0. \quad (36.2)$$

Подбором коэффициентов находим линейное решение:

$$b(x) = \frac{1}{3}x + \frac{1}{6}. \quad (36.3)$$

3. Составляем табличку и видим, что стратегия $b_1 = X_1$ нестрого доминирует остальные стратегии.
4. Составляем табличку и видим, что стратегия $b_1 = X_1$ нестрого доминирует остальные стратегии.
5. Предположим, что стратегия имеет вид: если ценность ниже порога x^* , то делать ставку 0, иначе делать ставку 0.5.

Осталось найти x^* .

Допустим, что второй игрок использует такую стратегию.

Если первый сделает ставку ноль, то его ожидаемый выигрыш будет равен:

$$\pi(x, 0) = x^* \frac{1}{2}x. \quad (36.4)$$

Если первый сделает ставку 0.5, то его ожидаемый выигрыш будет равен:

$$\pi(x, 0.5) = (x - 0.5)x^* + \frac{1}{2}(x - 0.5)(1 - x^*) = \frac{1}{2}(x - 0.5)(x^* + 1). \quad (36.5)$$

Находим условие, при котором $\pi(x, 0.5) > \pi(x, 0)$, получаем:

$$x > \frac{1}{2}(x^* + 1). \quad (36.6)$$

Значит, правая часть представляет собой x^* . Решаем уравнение $x^* = \frac{1}{2}(x^* + 1)$, получаем $x^* = 1$, то есть вне зависимости от ценности игрокам имеет смысл ставить 0.